Examen final
Cours d'introduction à la logique, semestre d'hiver 2003-2004
3 février 2004

Nom : ______________________________

Adresse éléctronique : ______________________________

Points obtenus (dans 6 questions avec un total de 20 points) : ________ Note : ________

1. (3 points) Formulez les lois de Morgan pour la logique propositionnelle et utilisez des tables de vérités pour montrer qu'elles sont correctes.

2. (2 points) Déterminez lesquelles des paires suivantes de propositions sont telles que le premier membre a la même table de vérité que le second :
   (a) "$(p \wedge \neg q) \wedge r$" et "$p \wedge (\neg q \wedge r)$"
   (b) "$\neg(p \vee q)$" et "$\neg p \vee \neg q$"

3. (2 points) Considérez les deux propositions suivantes :
   1 Chaque douanier fou hait un coureur.
   2 Il y a un coureur qui est haï par tous les douaniers fous.
   (a) Est-ce qu'une de ces propositions est structurellement ambigüe ? Si oui, laquelle et entre quelles deux formes logique est-elle ambigüe ?
   (b) Est-ce qu'une de ces propositions implique sémantiquement l'autre et si oui, dans quel sens va l'implication ?

4. (3 points) Formalisez les phrases données dans un langage de la logique des prédicats et formulez, en français, des phrases contradictoires aux phrases données (a) à (c) :
   (a) Quelques champignons sont répandus et quelques champignons sont vénéneux.
   (b) Tous les chemins mènent à Rome.
   (c) Seuls les fous adorent Aristote.

5. (5 points) Prouvez, à l'aide de la méthode des arbres, les propositions suivantes :
   (a) "$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$"
   (b) "$((p \rightarrow (p \wedge q)) \wedge p) \rightarrow q$"
   (c) "$\forall x(Fx \rightarrow Ga) \rightarrow (\exists x(Fx) \rightarrow Ga)$"
   (d) "$Ga \rightarrow (\forall x(Fx) \rightarrow \exists x(Fx))$"

6. (5 points) Prouvez, par la méthode de la déduction naturelle, les séquents suivants :
   (a) "$\{p, p \rightarrow q\ ,\ p \rightarrow r\} \ \vdash\ q \wedge r$"
   (b) "$\{p \vee q\ ,\ p \rightarrow r\ ,\ q \rightarrow r\} \ \vdash\ r \vee s$"
   (c) "$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx) \ \vdash\ \forall x(Fx \vee Gx)$"
   (d) "$\{\forall x(Gx \rightarrow Hx)\ ,\ \exists x(Fx \wedge Gx)\} \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$"