

Exercices 10

Cours d'introduction à la logique, semestre d'hiver 2003-2004

A rendre avant le mardi 20 janvier, 10 h

Nom(s) : _____

Points obtenus (dans 4 questions avec un total de 20 points) : _____

1. (5 points) Trouvez, à l'aide de la méthode des arbres, des modèles pour les propositions suivantes :

- (a) " $\exists x \forall y Rxy \wedge \exists x \exists y \neg Rxy$ "
- (b) " $\forall x \neg Sxx \wedge \exists x \exists y \exists z (Sxy \wedge Syx \wedge \neg Sxz)$ "
- (c) " $\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \neg Rxx \wedge \neg \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$ "
- (d) " $\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \neg Rxx \wedge \exists x \exists y (Rxy \wedge \neg Ryx)$ "

2. (6 points) Déterminez, à l'aide de la méthode des arbres, si oui ou non les propositions suivantes sont valides :

- (a) " $\exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy$ "
- (b) " $\forall x Fx \rightarrow \exists x Fx$ "
- (c) " $\neg \exists y Py \rightarrow (\forall y (Fy \rightarrow \exists x Fx))$ "
- (d) " $\forall x (Fx \rightarrow (Gx \wedge Hx)) \rightarrow \forall x ((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx)$ "

3. (6 points) Vérifiez, à l'aide de la méthode des arbres, la validité des propositions suivantes. Indiquez des structures dans lesquelles les converses de (b) et de (d) sont fausses.

- (a) " $\forall x (Fx \wedge Gx) \leftrightarrow (\forall x Fx \wedge \forall x Gx)$ "
- (b) " $(\forall x Fx \vee \forall x Gx) \rightarrow \forall x (Fx \vee Gx)$ "
- (c) " $\exists x (Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x Fx \vee \exists x Gx)$ "
- (d) " $\exists x (Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x Fx \wedge \exists x Gx)$ "

4. (3 points) Soient les abréviations suivantes :

- "p" pour " $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$ " ("la relation R est symétrique")
- "q" pour " $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$ " ("la relation R est transitive")
- "r" pour " $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Rxx)$ " ("la relation R est réflexive")
- "s" pour " $\forall x \exists y (Rxy)$ " ("la relation R est 'ouverte'")
- "t" pour " $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$ " ("la relation R est anti-symétrique")

(a) Prouvez, par la méthode des arbres, la proposition suivante :

$$(p \wedge q) \rightarrow r \tag{1}$$

(b) Montrez qu'on ne peut pas, par la méthode des arbres, trouver un modèle pour la proposition suivante :

$$\neg(q \wedge s \wedge t) \rightarrow \exists x \forall y \neg(Ryx) \tag{2}$$

(c) Donnez un exemple d'une structure dans laquelle (2) est vraie.