

Exercices 11

Cours d'introduction à la logique, semestre d'hiver 2003-2004

A rendre avant le mardi 27 janvier, 10 h

Nom(s) : _____

Points obtenus (dans 2 questions avec un total de 20 points) : _____

1. (14 points) Prouvez, par la méthode de la déduction naturelle, les séquents suivants :

- (a) “ $\{\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx), \forall x(Hx \rightarrow Gx)\} \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ ”
- (b) “ $\{\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx), \forall x(Hx \rightarrow Gx)\} \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$ ”
- (c) “ $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(Fx) \rightarrow \forall x(Gx)$ ”
- (d) “ $\{\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)\} \vdash \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$ ”
- (e) “ $\{\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)\} \vdash \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$ ”
- (f) “ $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x(Fx) \rightarrow \exists x(Gx)$ ”
- (g) “ $\forall x(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$ ”
- (h) “ $\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx) \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$ ”
- (i) “ $\exists x(Fa \rightarrow Fx) \vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$ ”
- (j) “ $\exists x(Fx) \rightarrow Fa \vdash \forall x(Fx \rightarrow Fa)$ ”
- (k) “ $\exists x \forall y(Rxy) \vdash \forall y \exists x(Rxy)$ ”
- (l) “ $\exists x \exists y(Rxy) \vdash \exists y \exists x(Rxy)$ ”
- (m) “ $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(\exists y(Fy \wedge Rxy) \rightarrow \exists y(Gy \wedge Rxy))$ ”
- (n) “ $\{\exists x(Fx \wedge Gx), \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow \neg Rxy))\} \vdash \exists x(Fx \wedge \neg \forall y(Fy \rightarrow Rxy))$ ”

2. (6 points) Dites si les applications suivantes des règles de déduction naturelle pour les quantificateurs sont correctes ; si elles ne sont pas correctes, dites pourquoi elles ne le sont pas.

(a)

- | | | | | | |
|----------|---------------------------------------|----------|---------------------------------------|--|-----------------|
| 1 | $\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$ | \vdash | $\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$ | | prémisse |
| 2 | $\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$ | \vdash | $\exists z(Faa \wedge Gaz)$ | | de (1) par (SU) |

(b)

1	$\forall x \exists z (Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \forall x \exists z (Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x \exists z (Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \exists z (Faz \wedge Gbz)$	de (1) par (SU)

(c)

1	Fba	$\vdash Fba$	prémisse
2	Fba	$\vdash \exists y (Fby)$	de (1) par (GE)

(d)

1	$\exists x (Fxa)$	$\vdash \exists x (Fxa)$	prémisse
2	$\exists x (Fxa)$	$\vdash \exists y \exists x (Fyx)$	de (1) par (GE)

(e)

1	$Fab \rightarrow \forall x (Gax)$	$\vdash Fab \rightarrow \forall x (Gax)$	prémisse
2	$Fab \rightarrow \forall x (Gax)$	$\vdash \forall y (Fay \rightarrow \forall x (Gax))$	de (1) par (GU)

(f)

1	$\exists x (Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash \exists x (Fxa \wedge Gbx)$	prémisse
2	$\exists x (Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash Fba \wedge Gbb$	de (1) par (SE)