Exercices 9
Cours d'introduction à la logique, semestre d'hiver 2003-2004
A rendre avant le mardi 13 janvier, 10 h

Nom(s) : ______________________________

Points obtenus (dans 6 questions avec un total de 20 points) : __________

1. (2 points) Formalisez les phrases suivantes dans le calcul des prédicats :
   (a) Si tous les commandeurs doivent être renversés, alors il n'y a aucun commandeur qui ne doit pas être renversé.
   (b) Tout oiseau qui n'est ni nuisible ni dangereux n'est pas un rapace.
   (c) Quelques champignons sont à la fois répandus et vénéneux.
   (d) Quelques champignons sont répandus et quelques champignons sont vénéneux.

2. (1 point) Formulez en langage ordinaire les négations des phrases (c) et (d) de la première question. (c) et (d) ne sont pas logiquement équivalentes dans la mésure où un des deux implique l'autre, mais la converse (que l'autre implique le premier) n'est pas vraie. Dans quel sens va l'implication ?

3. (2 points) Donnez des phrases françaises dont les formules suivantes sont des formalisations :
   (a) "$\forall x(Dx \rightarrow \forall y((Cy \land Fy) \rightarrow Hxy))$"
   (b) "$\exists x((Dx \land Fx) \rightarrow Pax)$"

4. (6 points) Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats avec $\mathbf{I} = \{0\}$, $\mathbf{J} = \{0,1,2\}$, $\mathbf{K} = \{0,1\}$, $\lambda(0) = 2$, $\mu(0) = 1$, $\mu(1) = \mu(2) = 2$. Nous remplaçons les signes non-logiques par les suivants :

$$\begin{array}{rcl} \ldots R_0 \cdots & \rightsquigarrow & \ldots \leq \cdots \\ f_0(\ldots) & \rightsquigarrow & -\ldots \\ f_1(\ldots,\cdots) & \rightsquigarrow & \ldots + \cdots \\ f_2(\ldots,\cdots) & \rightsquigarrow & \cdots \times \cdots \\ c_0 & \rightsquigarrow & 0 \\ c_1 & \rightsquigarrow & 1 \end{array}$$

(a) Est-ce que les expressions suivantes sont des termes de $\mathcal{L}^+$?

(i) "0"

(ii) "$x_1 + 1$"

(iii) "$+x_1$"

(iv) "$x_1\times$"

(v) "$x_1 \times (0+1)$"

(vi) "2"

(b) Est-ce que les expressions suivantes sont des formules atomiques de $\mathcal{L}^+$?

(i′) "$x_1 + 1$"

(ii′) "$0 + 0 \doteq 1$"

(iii′) "$(x_1 \leq 1) \doteq 1$"

(iv′) "$\forall x_1(x_1 \leq (0+1))$"

(v′) "$0 + 1 \doteq 0 \times 1$"

(vi′) "$x_1 \leq 1$"

(c) Est-ce que les expressions suivantes sont des formules de $\mathcal{L}^+$?

(i″) "0"

(ii″) "$x_1 + 1 \leq x_1$"

(iii″) "$\forall x_1(x_1 \times (0+1))$"

(iv″) "$1 + (x_1 \times (0+1))$"

(v″) "$(1+1) \wedge (0 \leq 1)$"

(vi″) "$\forall x_1(x_1 \leq (0+1))$"

(d) Dans lesquelles des formules suivantes $\mathcal{L}^+$ la variable "x_1" a-t-elle une occurrence libre ?

(i‴) "$x_1 + 1 \leq 1$"

(ii‴) "$\forall x_1 \neg(x_1 \doteq (0+1))$"

(iii‴) "$\exists x_2(1 + (x_2 \times (0+1) \leq x_1))$"

(iv‴) "$\forall x_1(0 \leq x_1) \wedge ((0 \leq 1) \vee 1 \doteq x_1)$"

(v‴) "$\forall x_1((0 \leq x_1) \rightarrow (1 \doteq x_1))$"

(vi‴) "$\forall x_2 \exists x_1 \neg(x_2 \leq x_1)$"

5. (6 points) Formalisez (ne faites pas de distinction entre "quelqu'un" et "quelque chose", "tout le monde" et "toutes les choses") :
   (a) Suzie est F.
   (b) Sam est F.
   (c) Quelques D sont F.
   (d) Tout D est F.
   (e) Seuls les D sont F.
   (f) Aucun H n'est F.
   (g) Quelques H ne sont pas F.
   (h) Sam n'est pas F.
   (i) Suzie a tué Sam.
   (j) Quelqu'un a tué Sam.
   (k) Sam a tué quelqu'un.
   (l) Quelqu'un a tué quelqu'un.
   (m) Quelqu'un s'est tué.
   (n) Personne ne s'est tué.
   (o) Quelqu'un a tué tout le monde.
   (p) Quelqu'un a été tué par tout le monde.
   (q) Il y a un S entre Sam et Suzie.
   (r) Chaque douanier hait un coureur. [n'importe lequel]
   (s) Quelques coureurs aiment chaque douanier.
   (t) Chaque douanier fou hait un coureur.
   (u) Quelques C n'ont la relation P à aucun FD.
   (v) Quelques C ont la relation P seulement aux D qui ne sont pas F.

6. (3 points) Justifiez, à l'aide de la définition de validité, la vérité des propositions suivantes :
   (a) "$\{\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Gx \to \neg Hx)\} \models \forall x(Fx \to \neg Hx)$"
   (b) "$\forall x(Fx \to Gx) \models \neg \exists x(Fx \land \neg Gx)$"
   (c) "$\{\forall x(Fx \to Gx), \exists x(\neg Gx)\} \models \exists x(\neg Fx)$"