La déduction naturelle

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Feuille d'accompagnement pour le cours du 20 janvier 2004

Points à retenir du dernier cours

1. La substitution d'un terme pour une variable dans une formule substitue ce terme à toute occurrence de la variable dans la formule.
2. Pour qu'une telle substitution compte comme instanciation, il faut que le terme soit libre pour la variable dans la formule, c'est-à-dire qu'il ne contient pas de variable qui devient liée par la substitution.
3. Nous pouvons axiomatiser la logique des prédicats par un calcul hilbertien, qui a comme axiomes les tautologies propositions, des schémas des axiomes d'identité et un seul schéma d'axiome quantificationnel, $\ulcorner \forall x(\phi) \rightarrow \phi(x/t) \urcorner$, et deux règles d'inférences, MP et la suivante :

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \forall x(\psi)} \quad \text{si “}x\text{” n'a pas d'occurrence libre dans } \phi$$

4. Dans une structure ayant un domaine fini, une quantification universelle est équivalente à la conjonction de ses instanciations et une quantification existentielle est équivalente à la disjonction de ses instanciations.
5. Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner \phi(a) \urcorner$, pour une constante individuelle “a”, sont vraies. Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ sont fausses.
6. Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ est fausse. Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ est vraie.
7. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur universel et la négation d'un quantificateur existentiel sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner & & \ulcorner \neg\exists x(\phi(x)) \urcorner \\
| & & | \\
\ulcorner \phi(a_1) \urcorner & & \ulcorner \neg\phi(a_1) \urcorner \\
\ulcorner \phi(a_2) \urcorner & \text{pour toutes les constantes “}a_i\text{”} & \ulcorner \neg\phi(a_2) \urcorner \\
\ulcorner \phi(a_3) \urcorner & \text{apparaissant sur cette branche} & \ulcorner \neg\phi(a_3) \urcorner \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

8. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel sont les suivantes :

$$\begin{array}{cccc}
 & \ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner & & \\
\ulcorner \phi(a_1) \urcorner & \ulcorner \phi(a_2) \urcorner & \ldots & \ulcorner \phi(b) \urcorner
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & \ulcorner \neg\forall x(\phi(x)) \urcorner & & \\
\ulcorner \neg\phi(a_1) \urcorner & \ulcorner \neg\phi(a_2) \urcorner & \ldots & \ulcorner \neg\phi(b) \urcorner
\end{array}$$

pour toutes les constantes “a_i” de la branche et une nouvelle constante “b”

9. Nous pouvons simplifier les dernières règles pour "$\exists x(\phi(x))$" et pour "$\neg\forall x(\phi(x))$" en nous concentrant uniquement sur la branche contenant la constante nouvelle.
10. La méthode des arbres nous permet prouver une proposition *si* cette proposition est valide. Mais nous pouvons pas déduire du fait que nous arrivons pas à la prouver (que l'arbre pour sa négation ne se ferme pas) que la proposition n'est pas valide.

Les règles d'introduction et d'élimination de quantificateurs

Voici une inférence qui élimine un quantificateur universel :

$$\frac{\text{Tous les hommes sont mortels.}\quad \text{Socrate est un homme.}}{\text{Socrate est mortel.}} \tag{1}$$

Voici comment nous prouver le séquent correspondant par la méthode de la déduction naturelle :

1	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash Ha$	prémisse
2	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	prémisse
3	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash Ha \rightarrow Ma$	de (2) par (SU)
4	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash Ma$	de (1) et (3) avec (MP)

Voici une application de la règle qui introduit un quantificateur universel :

1	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash Fa$	de (1) par (SU)
4	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash Fa \rightarrow Ga$	de (2) par (SU)
5	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash \forall x(Gx)$	de (5) avec (GU)

Mais attention, le raisonnement suivant est fallacieux :

1	Fa	$\vdash Fa$	prémisse
2	Fa	$\vdash \forall x(Fx)$	de (1) par (GU)

Voici comment nous pouvons introduire un quantificateur existentiel :

1	$\forall x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx)$	$\vdash Fa$	de (1) par (SU)
3	$\forall x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	de (2) par (GE)

Et voici comment l'éliminer :

1	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Fa$	supposition (du disjoint typique)
4	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Fa \rightarrow Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	de (5) avec (GE)
7	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Gx)$	de (2), (3) et (6) avec (SE)

Mais attention ! Le raisonnement suivant est fallacieux :

1	$\exists x(Fx)$	$\vdash\ \exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^*\ Fa$	supposition
3	$\exists x(Fx)$	$\vdash\ Fa$	de (1), (2) et (2) avec (SE)
4	$\exists x(Fx)$	$\vdash\ \forall x(Fx)$	de (3) avec (GU)

Et celui-ci est également fallacieux :

1	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash\ \exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash\ Fa$	prémisse
3	$\exists x(Fx), Fa, Ga$	$\vdash^*\ Ga$	supposition
4	$\exists x(Fx), Fa, Ga$	$\vdash^*\ Fa \wedge Ga$	de (2) et (3) avec ($\wedge$**I**)
5	$\exists x(Fx), Fa, Ga$	$\vdash^*\ \exists x(Fx \wedge Gx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash\ \exists x(Fx \wedge Gx)$	de (2), (3) et (5) avec (SE)

Les règles de la déduction naturelle pour la logique des prédicats

L'élimination du quantificateur universel et l'introduction du quantificateur existentiel

Soit ϕ une formule de $\mathcal{L}^+$, "x" une variable et t un terme qui est *libre pour "x" dans ϕ*.[1] Soit $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ le résultat de la substitution (uniforme) de "t" pour "x" dans ϕ. La règle de *'spécialisation universelle'* (SU) nous donne alors le droit de conclure $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ à partir de $\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	de (m) avec (SU)

La règle de *'généralisation existentielle'* (GE) est la converse de (SU) : elle nous donne le droit d'inférer $\ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$ à partir de $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$.

m	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$	de (m) avec (GE)

Dans les deux cas, d'éventuelles suppositions ou prémisses à la ligne (m) sont conservées à la ligne (n).

L'introduction du quantificateur universel et l'élimination du quantificateur existentiel

Soit $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ une formule qui contient une constante individuelle "a". S'il n'est pas le cas que "a" a une occurrence dans une des prémisses dont dépend la preuve de ϕ, la règle de *'généralisation universelle* (GU) nous permet de étendre une preuve de $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ à une preuve de $\ulcorner\forall x\phi(a/x)\urcorner$ comme

[1] Un terme n'est pas libre pour une variable dans une formule si une éventuelle substitution de la variable par le terme avait comme conséquence qu'une occurrence libre de cette variable dans le terme devenait gouvernée par un quantificateur dans la formule. Dans le cas où le terme en question est une variable, ceci veut dire qu'il serait substitué à l'intérieur d'un quantificateur qui le gouvernera.

suit :

m		$\vdash \ulcorner \phi(a) \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner \forall x \phi(a/x) \urcorner$	de (m) avec (GU)

Conversement, la règle de la *'spécialisation existentielle'* (SE) nous permet de prouver directement de $\ulcorner \exists x \phi(a/x) \urcorner$ toute formule ψ que nous pouvons prouver à partir de la supposition $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ – s'il n'est pas le cas que "a" a une occurrence dans ψ ou dans une supposition dont dépend la preuve ψ à partir de $\ulcorner \phi(a) \urcorner$:

m		$\vdash \ulcorner \exists x \phi(a/x) \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n	$\ulcorner \phi(a) \urcorner$	$\vdash^* \ \ulcorner \phi(a) \urcorner$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
o	$\ulcorner \phi(a) \urcorner$	$\vdash^* \ \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
p		$\vdash \psi$	de (m), (n) et (o) avec (SE)

La ligne (p) contiendra toutes les prémisses ou suppositions de la ligne (m) et toutes les suppositions nécessaires pour la preuve de ψ de $\ulcorner \phi(a) \urcorner$ (autres que $\ulcorner \phi(a) \urcorner$).

Quelques exemples

1	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \ \forall x(Gx \to Hx)$	prémisse
2	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \ \exists x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Fa \wedge Ga$	supposition
4	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Ga \to Ha$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Ga$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Ha$	de (4) et (5) avec (MP)
7	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Fa$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Fa \wedge Ha$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)
9	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx), Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ \exists x(Fx \wedge Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \ \exists x(Fx \wedge Hx)$	de (2), (3) et (9) avec (SE)

1	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \ \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \ \forall x(Fx)$	de (1) avec ($\wedge$**E**)
3	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \ Fa$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \ \forall x(Gx)$	de (1) avec ($\wedge$**E**)
5	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \ Ga$	de (2) avec (SU)
6	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \ Fa \wedge Ga$	de (3) et (5) avec ($\wedge$**I**)
7	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \ \forall x(Fx \wedge Gx)$	de (6) avec (GU)

1	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$\vdash\ \exists x(Fx \vee Gx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga$	$\vdash^*\ Fa \vee Ga$	supposition
3	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^*\ Fa$	supposition
4	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^*\ \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (4) avec ($\vee$**I**)
6	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^*\ Ga$	supposition
7	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^*\ \exists x(Gx)$	de (6) avec (GE)
8	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^*\ \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (7) avec ($\vee$**I**)
9	$\exists x(Fx \vee Gx), Fa \vee Ga$	$\vdash^*\ \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (2, 3, 5, 6, 8) avec ($\vee$**E**)
10	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$\vdash\ \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (1), (2) et (9) avec (SE)

1	$Fa \to \exists x(Fx)$	$\vdash\ Fa \to \exists x(Fx)$	prémisse
2	$Fa \to \exists x(Fx), Fa$	$\vdash^*\ Fa$	supposition
3	$Fa \to \exists x(Fx), Fa, Fa \to Fb$	$\vdash^*\ Fa \to Fb$	supposition
4	$Fa \to \exists x(Fx), Fa, Fa \to Fb$	$\vdash^*\ Fb$	de (2) et (3) avec (MP)
5	$Fa \to \exists x(Fx), Fa, Fa \to Fb$	$\vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (4) avec (GE)
6	$Fa \to \exists x(Fx), Fa$	$\vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (1), (3) et (5) avec (SE)
7	$Fa \to \exists x(Fx)$	$\vdash\ Fa \to \exists x(Fx)$	de (2) et (6) avec (PC)

1	$\forall x \forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall x \forall y(Rxy)$	prémisse
2	$\forall x \forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall y(Ray)$	de (1) avec (SU)
3	$\forall x \forall y(Rxy)$	$\vdash\ Rab$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x \forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall x(Rxb)$	de (3) avec (GU)
5	$\forall x \forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall y \forall x(Rxy)$	de (4) avec (GU)

Abrégeons "$\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \to Rxy))$" par "**A**" et "$\forall x(Fx \to \forall y(By \to \neg Rxy))$" par "**B**".

1	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash\ \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \to Rxy))$	prémisse
2	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash\ \forall x(Fx \to \forall y(By \to \neg Rxy))$	prémisse
3	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray)$	$\vdash^*\ Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray)$	supposition
4	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray)$	$\vdash^*\ Fa$	de (3) avec ($\wedge$)
5	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray)$	$\vdash^*\ \forall y(Gy \to Ray)$	de (3) avec ($\wedge$)
6	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray)$	$\vdash^*\ Fa \to \forall y(By \to \neg Ray)$	de (2) avec (SU)
7	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray)$	$\vdash^*\ \forall y(By \to \neg Ray)$	de (4) et (6) avec (MP)
8	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray), Gb$	$\vdash^*\ Gb$	supposition
9	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray), Gb$	$\vdash^*\ Gb \to Rab$	de (5) avec (SU)
10	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray), Gb$	$\vdash^*\ Rab$	de (8) et (9) avec (MP)
11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray), Gb$	$\vdash^*\ Bb \to \neg Rab$	de (7) avec (SU)
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray), Gb$	$\vdash^*\ \neg\neg Rab$	de (10) avec (DN)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray), Gb$	$\vdash^*\ \neg Bb$	de (12) et (11) avec (MT)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray)$	$\vdash^*\ Gb \to \neg Bb$	de (8) et (13) avec (PC)
15	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, Fa \wedge \forall y(Gy \to Ray)$	$\vdash^*\ \forall x(Gx \to \neg Bx)$	de (14) avec (GU)
16	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash\ \forall x(Gx \to \neg Bx)$	de (1), (3) et (15) avec (SE)