La méthode axiomatique

Cours d'introduction à la logique et la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Feuille d'accompagnement pour le cours du 18 novembre 2003

Points à retenir du dernier cours

1. Il faut distinguer des différents niveaux de langage. 'Désignation', 'vérité' et 'validité' sont des expressions qui appartiennent au méta-langage.
2. La relation de conséquence sémantique subsiste entre deux propositions ssi il n'est pas logiquement possible que la première soit vraie et la deuxième fausse ; ss'il y a une inférence valide de l'une à l'autre.
3. Pour rendre compte de la généralité des lois logiques, il convient d'introduire des noms "ϕ", "ψ" etc. pour des propositions arbitraires.
4. Pour dire qu'une loi logique s'applique à toutes les propositions d'une certaine forme, il faut utiliser les crochets de Quine. "$\ulcorner \phi \wedge \neg\psi \urcorner$" est une expression qui est composée de ϕ, du signe de conjonction "$\wedge$", de "$\neg$" et de ψ.
5. Une inférence qui a "p" comme prémisse et "q" comme conclusion est valide si et seulement si "$p \rightarrow q$" est une tautologie.
6. Une tautologie peut être inférée de n'importe quelle prémisse ; on peut inférer n'importe quelle conclusion d'une contradiction.
7. Mis à part la conséquence sémantique (ou 'subalternation'), il y a d'autres relations méta-linguistiques entre des propositions : l'équivalence sémantique (mêmes tables de vérité), la contradiction (exactement une est vraie), la contrariété (pas les deux vraies), la subcontrariété (pas les deux fausses).
8. La validité ne concerne pas l'ordre des prémisses ; elle est monotone, transitive et réflexive.
9. Les lois de De Morgan :
$$\ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg\phi \vee \neg\psi \urcorner$$
$$\ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg\phi \wedge \neg\psi \urcorner$$
10. Les lois de distributivité :
$$\ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \chi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \urcorner$$
$$\ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \chi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \urcorner$$

Déductibilité syntaxique vs. validité sémantique

Trois différents niveaux de formalisation :

langage ordinaire	"La terre tourne"	signification	vérité
méthode sémantique	"p"	–	vérité
méthode syntaxique	"p"	–	–

La relation de déductibilité, dénotée par "$\vdash$", est purement syntaxique : elle subsiste entre deux propositions si et seulement s'il est possible de manipuler les symboles qui représentent la deuxième selon certaines règles purement structurelles de manière à ce qu'on arrive à des symboles qui représentent la première proposition : ψ peut être déduit de ϕ si on peut appliquer des règles d'inférence à des axiomes et à ϕ de sorte qu'on obtienne ψ.

Le langage de la logique des propositions

Définition 1. *L'*alphabet *du langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle classique consiste en les signes suivants :*

1. *des propositions atomiques "p_0", "p_1", "p_2" ...(une infinité dénombrable)*
2. *les connecteurs "$\neg$" ("ne...pas"), "$\wedge$" ("et"), "$\vee$" ("ou"), "$\rightarrow$" ("si...alors) et "$\leftrightarrow$" ("ssi")*
3. *des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules*

Définition 2. *Une* formule propositionnelle *est définie d'une manière récursive comme suit :*

1. *Toute proposition atomique "p_i" ($i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*
2. *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*
3. *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Définition 3. *Une* théorie Th *est un ensemble (fini ou infini) de formules propositionnelles.*

La barre de Sheffer

La barre de Sheffer :

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi\|\psi\urcorner$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Tous les connecteurs propositionnels peuvent être définis en termes de "|" :

$$
\begin{array}{rcl}
\ulcorner\neg\phi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\phi|\phi\urcorner \\
\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi|\psi)|(\phi|\psi)\urcorner \\
\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|\phi)|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|(\psi|\psi)) \mid ((\phi|\phi)|\psi)) \ \mid \ (\psi|(\phi|\phi)) \mid ((\psi|\psi)|\phi)\urcorner
\end{array}
$$

Un peu d'histoire

Gottlob Frege (*Idéographie*, 1879) a été le premier à axiomatiser la logique propositionnelle et la logique des prédicats. Ses travaux sont restés inaperçus jusqu'à la parition du premier volume de l'étude époquale *Principa Mathematica*, de Bertrand Russell et Alfred North Whitehead. Russell a découvert en 1902 que le système de Frege (*Lois Fondamentales de l'Arithmétique*, 1893 et 1903) était inconsistent (parce qu'il permet la formation de l'ensemble $a = \{x \mid x \notin x\}$).
Cette révolution en logique a rendu possible des progrès importants en mathématiques (axiomatisation de l'arithmétique et de la géométrie) et leurs a rajouté deux nouvelles branches, les méta-mathématiques (étude des calculs formels, Hilbert) et la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo).
Le résultat le plus important en méta-mathématique était la découverte, par Gödel en 1931, de l'incomplétude de l'arithmétique, le plus important résultat en sémantique la définition, par le polonais Alfred Tarski en 1936, d'une définition non-contradictoire de "vérité".
Les trois grands courants dans la philosophie des mathématiques dans la première moitié du 20ème siècle étaient le logicisme de Frege (les mathématiques comme partie de la logique), le formalisme de Hilbert (les mathématiques comme manipulations des symboles) et l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting (constructivisme, rejet du tiers exclu).

Ce qu'est un calcul

Définition 4. *Un* calcul *est un ensemble de formules propositionnelles déterminé par un ensemble de formules propositionnelles qui sont appelées les '*axiomes*' et des règles d'inférence. Un élement de cet ensemble est appelé un '*théorème*'. Ce qu'est un théorème est déterminé par la définition récursive suivante :*

1. *Tout axiome est un théorème.*
2. *Une formule propositionnelle qu'on obtient en appliquant une règle d'inférence à des théorèmes est un théorème.*
3. *Rien d'autre n'est un théorème.*

"$\vdash$" représente la relation de *déductibilité* : "$\mathsf{HC} \vdash \phi$" veut dire que ϕ peut être déduit des axiomes du calcul HC – c'est à dire qu'il y a une preuve, dans HC, dont ϕ est la conclusion.

La notion de preuve

Une preuve est une séquence de formules bien formées qui satisfait quelques critères purement syntaxiques :

Définition 5. *Une* preuve*, dans un calcul HC et à partir d'une théorie Th, est une séquence finie de propositions $\langle \phi_1, \dots \phi_n \rangle$ telle qu'on a, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \cup \{\phi_1, \dots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$.*

Définissons la relation de déductibilité représentée par "$\vdash$" :

Définition 6. *Si HC est un calcul, Th une théorie et ϕ une formule propositionnelle, nous définissons $\ulcorner \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi \urcorner$ ($n \in \mathbb{N}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par induction sur n :*

1. *Si ϕ est un axiome de HC, alors $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Si ϕ est un membre de Th, alors $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Si $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ et $m_i < n$ pour toutes les prémisses ψ_i d'une règle d'inférence de HC, alors $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ pour la conclusion ϕ de cette règle d'inférence.*

Un calcul Hilbertien pour la logique propositionnelle

Définition 7. *Le calcul HC est déterminé par toutes les formules de $\mathcal{L}$ qui ont la forme d'un des axiomes suivantes :*

$\mathbf{H_1}$	$\ulcorner \phi \rightarrow \phi \urcorner$	*réflexivité*
$\mathbf{H_2}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)) \urcorner$	*transitivité*
$\mathbf{H_3}$	$\ulcorner ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \urcorner$	*conditionaliser l'antécédent*
$\mathbf{H_4}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \urcorner$	*augmenter l'antécédent*
$\mathbf{H_5}$	$\ulcorner \phi \rightarrow (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire "$\vee$" à droite*
$\mathbf{H_6}$	$\ulcorner \psi \rightarrow (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire "$\vee$" à gauche*
$\mathbf{H_7}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi)) \urcorner$	*alternative*
$\mathbf{H_8}$	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi \urcorner$	*élimination "$\wedge$" à droite*
$\mathbf{H_9}$	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi \urcorner$	*élimination "$\wedge$" à gauche*
$\mathbf{H_{10}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \chi))) \urcorner$	*composition*
$\mathbf{H_{11}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \urcorner$	*conversion*
$\mathbf{H_{12}}$	$\ulcorner \phi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi) \urcorner$	*ex falso quodlibet*
$\mathbf{H_{13}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg\phi)) \rightarrow \neg\phi \urcorner$	*reductio ad absurdum*
$\mathbf{H_{14}}$	$\ulcorner ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner$	*introduction "$\leftrightarrow$"*
$\mathbf{H_{15}}$	$\ulcorner (\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \urcorner$	*élimination "$\leftrightarrow$"*
$\mathbf{H_{16}}$	$\ulcorner \phi \vee \neg\phi \urcorner$	*tautologie*

La seule règle d'inférence de HC *est modus ponens* MP *:* $\dfrac{\phi, \ulcorner\phi \to \psi\urcorner}{\psi}$.

L'axiome de Jean Nicod :

$$\ulcorner(\phi|(\psi|\chi)) \quad | \quad ((\xi|(\xi|\xi)) \mid ((\rho|\psi) \mid ((\phi|\rho)|(\phi|\rho))))\urcorner$$

Des preuves dans le calcul

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (q \vee p)$	$\mathbf{H_6}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (q \vee p)$	$\mathbf{H_5}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (q \vee p)) \to ((q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p)))$	$\mathbf{H_7}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \vee q) \to (q \vee p))$	(MP) de (2) et (3)

Nous énumerons les lignes de la preuve dans la colonne gauche, pour une référence future. Dans la colonne de droite, nous indiquons ou bien le numéro du schéma d'axiomes dont la ligne est une instance ou bien la règle d'inférence utilisée et les lignes auxquelles elle a été appliquée. Dans la troisième ligne, par exemple, nous avons substitué "$q \vee p$" pour χ dans $\mathbf{H_7}$. La difficulté principale avec les preuveds dans les calculs Hilbertiens est de savoir quelles sont les formules qu'il faut substituer dans les schémas d'axiomes pour être ensuite capable de déduire la conclusion voulue avec MP.

Des preuves sur le calcul

Theorem 8. *Soient ϕ, ψ, χ des formules propositionnelles :*

$$\ulcorner\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi\urcorner \quad \& \quad \ulcorner\mathsf{HC} \vdash \psi \to \chi\urcorner \implies \ulcorner\mathsf{HC} \vdash \phi \to \chi\urcorner \tag{1}$$

Preuve L'antécédent de (1) signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\ulcorner\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \to \psi\urcorner \qquad \ulcorner\mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi \to \chi\urcorner$$

Supposons que $n_1 + 1 < n_2$. Ce que nous devons montrer c'est qu'il y a un nombre n_3 tel que

$$\ulcorner\mathsf{HC} \vdash^{n_3} \phi \to \chi\urcorner$$

Nous avons, par $\mathbf{H_2}$, que

$$\ulcorner\mathsf{HC} \vdash^{0} (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))\urcorner$$

Avec (MP), nous pouvons donc dériver de la première partie de l'antécédent :

$$\ulcorner\mathsf{HC} \vdash^{n_1+1} (\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)\urcorner$$

De la deuxième partie de l'antécédent, nous pouvons en déduire avec (MP) :

$$\ulcorner\mathsf{HC} \vdash^{n_2+1} \phi \to \chi\urcorner$$

□