La méthode des arbres

Cours d'introduction à la logique et la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Feuille d'accompagnement pour le cours du 25 novembre 2003

Points à retenir du dernier cours

1. A part la méthode sémantique des tables de vérité, il existe une méthode syntaxique, qui ne fait abstraction non seulement des significations des propositions, mais aussi de leurs valeurs de vérité.
2. Il est possible de définir la syntaxe de la langue $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle d'une manière rigoureuse.
3. Tous les connecteurs de la logique propositionnelle sont définissable par un seul, la barre de Sheffer.
4. La logique moderne a commencé avec les travaux de Frege (*Idéographie*, 1879) et les travaux de Russell et Whitehead (*Principia Mathematica*, 1910).
5. Cette révolution en logique a rendu possible des progrès importants en mathématiques (axiomatisation de l'arithmétique et de la géométrie) et leurs a rajouté deux nouvelles branches, les méta-mathématiques (étude des calculs formels, Hilbert) et la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo).
6. Les trois grands courants dans la philosophie des mathématiques dans la première moitié du 20ème siècle étaient le logicisme de Frege (les mathématiques comme partie de la logique), le formalisme de Hilbert (les mathématiques comme manipulations des symboles) et l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting (constructivisme, rejet du tiers exclu).
7. Un calcul consiste en des axiomes et des règles d'inférences ; ces deux permettent de déduire des théorèmes des axiomes.
8. Il est possible de définir d'une manière purement syntaxique ce qu'est une preuve (dans un certain calcul).
9. La logique propositionnelle peut être axiomatisée de différentes manières.
10. Il faut distinguer les preuves dans le calcul (qui se font par les règles d'inférences et des substitutions dans des axiomes) et les preuves sur le calcul (qui parlent, par exemple, en général de l'existence de certaines preuves) qui se font par les méthodes mathématiques 'ordinaires'.

La sémantique de la logique propositionnelle

Définition 1. *Une* interprétation propositionnelle atomique I^* *est une fonction qui assigne à toute proposition atomique* $p_i, i\in\mathbb{N}$*, une des valeurs de vérité* $\mathbf{v}$ *ou* $\mathbf{f}$ *:* $I^* : \{p_i \mid i\in\mathbb{N}\} \to \{\mathbf{v},\mathbf{f}\}$.

Définition 2. *Donné une interprétation propositionnelle atomique* I^**, nous définissions une* interprétation propositionnelle $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \to \{\mathbf{v},\mathbf{f}\}$ *par les clauses récursives suivantes :*

I1 $\quad I(p) := I^*(p)$

I2 $$I(\neg p) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(p) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & I(p) = \mathbf{v} \end{cases}$$

I3 $$I(p \wedge q) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(p) = \mathbf{v} \textit{ et } I(q) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(p) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(q) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I4 $$I(p \vee q) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(p) = \mathbf{v} \textit{ ou } I(q) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(p) = \mathbf{f} \textit{ et } I(q) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I5 $\quad I(p \to q) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(p) = \mathbf{f} \text{ } ou \text{ } I(q) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(p) = \mathbf{v} \text{ } et \text{ } I(q) = \mathbf{f} \end{cases}$

I16 $\quad I(p \leftrightarrow q) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(p) = I(q) \\ \mathbf{f} & I(p) \neq I(q) \end{cases}$

Définition 3. *Une formule propositionnelle ϕ est une* tautologie *si et seulement si elle est vraie sous toutes les interprétations.ϕ est une* contradiction *si et seulement si elle n'est vraie sous aucune interprétation (et donc fausse sous toutes les interprétations).*

$$\begin{array}{rcl} \phi \text{ est une tautologie} & :\Longleftrightarrow & \forall I \ (I(\phi) = \mathbf{v}) \\ \phi \text{ est une contradiction} & :\Longleftrightarrow & \forall I \ (I(\phi) = \mathbf{f}) \end{array}$$

Définition 4. *Une théorie* Th *est* consistante *si et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles $\phi \in \mathsf{Th}$. Autrement, elle est* inconsistante *(c'est-à-dire si et seulement si aucune interprétation ne rende vraies toutes les formules propositionnelles $\phi \in \mathsf{Th}$).*

Définition 5. *Une formule propositionnelle ϕ est une* conséquence *(sémantique) d'une théorie* Th *(écrit : "$\mathsf{Th} \models \phi$") si et seulement si toute interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionelles dans* Th *rend vraie ϕ.*

$$\mathsf{Th} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall I \ \forall \psi \in \mathsf{Th} \ \ (I(\psi) = \mathbf{v} \ \to \ I(\phi) = \mathbf{v})$$

ϕ est une conséquence sémantique de Th si et seulement si $\mathsf{Th} \cup \{\neg\phi\}$ est inconsistant (s'il n'y a pas d'interprétation qui ne rend vraies toutes les formules dans Th et rend fausse ϕ).

Les relations entre conséquence sémantique et déductibilité

Quelle est la relation entre $\models$ (conséquence sémantique) et $\vdash$ (déductibilité) ?

correction : HC est correct : tout théorème est une tautologie.

complétude : HC est complet : toute tautologie est un théorème.

Théorème 6. *Soit* Th *une théorie et ϕ une formule propositionnelle :*

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \ \vdash \ \phi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \models \phi$$

'$\Longrightarrow$' (correction) : HC ne prouve pas trop, ne prouve pas plus que les vérités logiques

'$\Longleftarrow$' (complétude) : HC prouve assez, il n'y a pas de vérités logiques qui ne sont pas prouvable dans HC

La nature de la logique

La logique peut être considérée comme
– l'étude des vérités logiques (des théorèmes et des tautologies)
– l'étude des inférences logiques

Méthodes syntaxiques issus du deuxième paradigme :
– la méthode des arbres (des 'tableaux analytiques')
– la méthode de la déduction naturelle

Leur avantage : il ne faut plus chercher des substitutions dans des axiomes.

La méthode des arbres

F1 Si une négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est vraie.

F2 Si une conjonction $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ est vraie, alors ϕ et ψ sont vraies.

F3 Si une conjonction $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ est fausse, alors ou bien ϕ ou bien ψ est fausse.

F4 Si une disjonction $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ est vraie, alors ϕ ou ψ est vraie.

F5 Si une disjonction $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ est fausse, alors ϕ et ψ sont fausse.

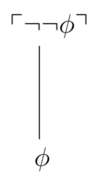
F6 Si une implication $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ est vraie, alors ou bien ϕ est fausse ou bien ψ est vraie.

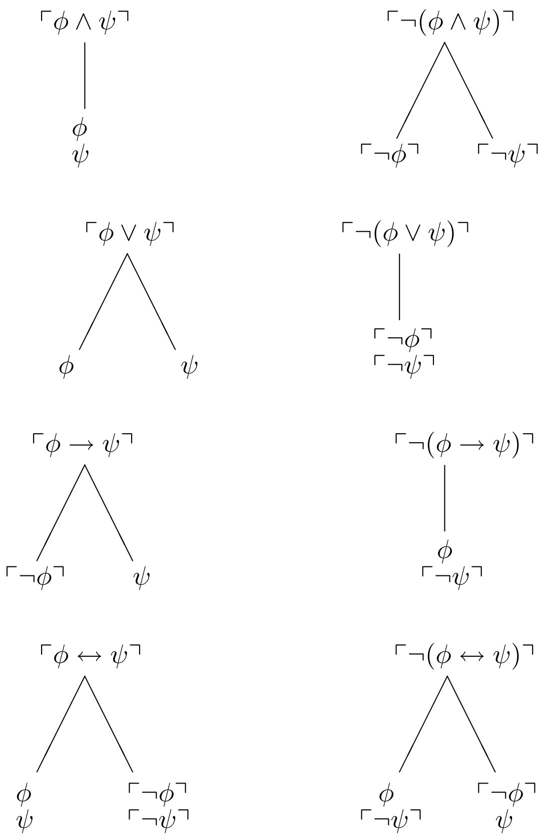
F7 Si une implication $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est vraie et ψ est fausse.

F8 Si une équivalence $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ est vraie, alors ou bien ϕ et ψ sont vraies ou bien ϕ et ψ sont fausses.

F9 Si une équivalence $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ est fausse, alors ou bien ϕ est vraie et ψ fausse ou bien ϕ est fausse et ψ vraie.

Les règles de construction d'arbres :





Une branche se ferme si et seulement si le 'chemin de vérité' correspondant contient une proposition simple et sa négation. Après avoir appliqué une règle à une formule dans une branche, nous la marquons par le signe "✓". Après chaque application d'une règle, nous déterminons si nous pouvons déjà fermer une branche. Il est avantageux de toujours traiter d'abord les propositions qui n'ouvrent pas d'embranchements.

Quelques exemples