La déduction naturelle

Cours d'introduction à la logique et la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Feuille d'accompagnement pour le cours du 2 décembre 2003

Points à retenir du dernier cours

1. Une interprétation propositionnelle attribue des valeurs de vérité aux propositions simples et est étendue, d'une manière qui correspond aux tables de vérité des connecteurs, à toutes les formules du langage $\mathcal{L}$.
2. Une interprétation propositionnelle correspond à une possibilité logique et à une ligne dans une table de vérité.
3. Les notions sémantiques "tautologie", "contradiction", "consistance" et "conséquence sémantique" peuvent être définies en termes d'interprétations propositionnelles.
4. Un ensemble de propositions est consistant s'il y a et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies toutes les propositions de cet ensemble.
5. Un calcul syntaxique (un calcul hilbertien, un calcul d'arbres ou un calcul de la déduction naturelle) est dit 'correct' si tous ses théorèmes sont des tautologies.
6. Un tel calcul est dit 'complet' si toute tautologie en est un théorème.
7. Prouver une proposition ϕ par la méthode des arbres revient à montrer que toutes les branches de l'arbre pour sa négation $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ se ferment.
8. La méthode des arbres nous fournit un teste de consistance : elle nous permet d'établir si ou non un ensemble de propositions est consistant et, dans le cas d'une réponse affirmative, de trouver une interprétation qui rend vraies toutes les propositions de cet ensemble.
9. La méthode des arbres nous permet d'établir si ou non une proposition ϕ est une tautologie : elle l'est si et seulement si l'arbre pour sa négation $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ ne contient que des branches fermées.
10. La méthode des arbres nous permet également de tester un argument pour sa validité, en vérifiant si ou non l'implication correspondante est une tautologie.

Les suppositions

Dans un calcul hilbertien, il faut trouver les bons axiomes pour commencer, en faire des substitutions pertinentes et appliquer les bonnes règles d'inférence dans le bon ordre ; en appliquant la méthode des arbres, on décompose successivement la formule initiale en cherchant une interprétation sous laquelle elle est vraie.

La méthode de la réduction à l'absurde ne s'insère dans aucune de ces catégories, puisqu'elle utilise essentiellement la notion d'une '*supposition*'. Dans la langue naturelle, une supposition est l'énonciation d'une proposition qui manque de force assertoire. C'est l'usage des suppositions qui caractérise la méthode de la déduction naturelle.

Une réduction à l'absurde :

1		$\vdash\ p \rightarrow q$	prémisse
2		$\vdash\ q \rightarrow \neg p$	prémisse
3	p	$\vdash^*\ p$	supposition
4	p	$\vdash^*\ q$	de (1) et (3) avec (MP)
5	p	$\vdash^*\ \neg p$	de (2) et (4) avec (MP)
6		$\vdash \neg p$	de (3) et (5) par *reduction à l'absurde*

Une preuve conditionnelle :

1		$\vdash\ p \rightarrow q$	prémisse
2		$\vdash\ p \rightarrow (q \rightarrow r)$	prémisse
3		$\vdash\ \neg r$	prémisse
4	p	$\vdash^*\ p$	supposition
5	p	$\vdash^*\ q$	de (1) et (4) avec (MP)
6	p	$\vdash^*\ q \rightarrow r$	de (2) et (4) avec (MP)
7	p	$\vdash^*\ r$	de (5) et (6) avec (MP)
8		$\vdash\ p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
9		$\vdash\ \neg p$	de (3) et (9) par (MT)

Les règles d'introduction et d'élimination

$$\frac{\vdash\ \ulcorner\phi \rightarrow \bot\urcorner}{\vdash\ \ulcorner\neg\phi\urcorner}\ \neg\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash\ \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner}{\vdash\ \phi}\ \neg\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash\ \psi \\ \vdash\ \phi\end{array}}{\vdash\ \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner}\ \wedge\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash\ \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner}{\vdash\ \phi}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \frac{\vdash\ \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner}{\vdash\ \psi}\ \wedge\mathbf{E}$$

$$\frac{\vdash\ \phi}{\vdash\ \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash\ \psi}{\vdash\ \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash\ \ulcorner\neg\phi\urcorner \\ \vdash\ \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner\end{array}}{\vdash\ \psi}\ \vee\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi\ \vdash^*\ \phi \\ \phi\ \vdash^*\ \psi\end{array}}{\vdash\ \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner}\ \rightarrow\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash\ \phi \\ \vdash\ \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner\end{array}}{\vdash\ \psi}\ \rightarrow\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash\ \ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner \\ \vdash\ \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner\end{array}}{\vdash\ \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash\ \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner}{\vdash\ \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{E} \qquad \frac{\vdash\ \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner}{\vdash\ \ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{E}$$

Les règles de la déduction naturelle

La règle des suppositions

n	ϕ	$\vdash^*\ \phi$	supposition

Modus ponens (modus ponendo ponens)

m	$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (MP)

Modus tollens (modus tollendo tollens)

m	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \neg \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner$	de (m) et (n) par (MT)

Preuve conditionnelle

m	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
o		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	de (m) et (n) par (PC)

L'introduction et l'élimination de la double négation

m	$\vdash \ulcorner \neg\neg \phi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	de (m) par (DN)

m	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \neg\neg \phi \urcorner$	de (m) par (DN)

La réduction à l'absurde (reductio ad absurdum)

m	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
o	ϕ	$\vdash^* \ \ulcorner \neg \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
p		$\vdash \ulcorner \neg \phi \urcorner$	de (m), (n) et (o) par (RAA)

L'introduction de la conjonction

m	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	de (m) et (n) par ($\wedge$**I**)

L'élimination de la conjonction

m		$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \phi$	de (m) par $(\wedge\mathbf{E})$

m		$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \psi$	de (m) par $(\wedge\mathbf{E})$

L'introduction de la disjonction

m		$\vdash \phi$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	de (m) par $(\vee\mathbf{I})$

m		$\vdash \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	de (m) par $(\vee\mathbf{I})$

L'élimination de la disjonction

m		$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
o	ϕ	$\vdash^* \ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
p	ψ	$\vdash^* \ \psi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
q	ψ	$\vdash^* \ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
r		$\vdash \chi$	de (m), (n), (o), (p) et (r) par $(\vee\mathbf{E})$

L'introduction de l'équivalence matérielle

m		$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
o		$\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$	de (m) et (n) par $(\leftrightarrow \mathbf{I})$

L'élimination de l'équivalence matérielle

m	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

m	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

Quelques exemples

1.

1	$p \wedge q$	$\vdash\ p \wedge q$	prémisse
2	$p \wedge q$	$\vdash\ p$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$p \wedge q$	$\vdash\ q$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge q$	$\vdash\ q \wedge p$	de (2) et (3) par ($\wedge$**I**)

2.

1	p	$\vdash^*\ p$	supposition
2	p	$\vdash^*\ p$	(1)
3		$\vdash p \rightarrow p$	de (1) et (2) par (PC)

3.

1	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash\ p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash\ q \rightarrow r$	prémisse
3	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	$\vdash^*\ q$	de (1) et (3) avec (MP)
5	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	$\vdash^*\ r$	de (2) et (4) avec (MP)
6	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash\ p \rightarrow r$	de (3) et (5) avec (PC)

4.

1	$p \rightarrow \neg q$	$\vdash\ p \rightarrow \neg q$	prémisse
2	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p \wedge q$	supposition
3	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p$	de (2) par ($\wedge$**E**)
4	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ \neg q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ q$	de (2) par ($\wedge$**E**)
6	$p \rightarrow \neg q$	$\vdash\ \neg(p \wedge q)$	de (2), (4) et (5) par (RAA)

5.

1	$\neg(p \rightarrow (p \rightarrow q))$	$\vdash^*\ \neg(p \rightarrow (p \rightarrow q))$	supposition
2	$\neg(p \rightarrow (p \rightarrow q)), q$	$\vdash^*\ q$	supposition
3	$\neg(p \rightarrow (p \rightarrow q)), q, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$\neg(p \rightarrow (p \rightarrow q)), q, p, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
5	$\neg(p \rightarrow (p \rightarrow q)), q, p$	$\vdash^*\ p \rightarrow q$	de (4) et (2) par (PC)
6	$\neg(p \rightarrow (p \rightarrow q)), q$	$\vdash^*\ p \rightarrow (p \rightarrow q)$	de (3) et (5) par (PC)
7	$\neg(p \rightarrow (p \rightarrow q))$	$\vdash^*\ \neg q$	de (2), (1) et (6) par (RAA)
8		$\vdash\ \neg\neg(p \rightarrow (p \rightarrow q))$	de (1), (1) et (7) par (RAA)
9		$\vdash\ p \rightarrow (p \rightarrow q)$	de (8) par (DN)

6.

1	$p \vee q$	$\vdash\ p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
3	$p \vee q, p$	$\vdash^*\ q \vee p$	de (2) par ($\vee$**I**)
4	$p \vee q, q$	$\vdash^*\ q$	supposition
5	$p \vee q, q$	$\vdash^*\ q \vee p$	de (4) par ($\vee$**I**)
6	$p \vee q$	$\vdash\ q \vee p$	de (1,2,3,4,5) par ($\vee$**E**)

7.

1	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash\ \neg(\neg p \wedge \neg q)$	prémisse
2	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg(p \vee q)$	supposition
3	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^*\ p \vee q$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg p$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^*\ q$	supposition
7	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^*\ p \vee q$	de (6) par ($\vee$**I**)
8	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg q$	de (6), (2) et (7) par (RAA)
9	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg p \wedge \neg q$	de (5) et (8) par ($\wedge$**I**)
10	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash\ \neg\neg(p \vee q)$	de (2), (1) et (9) par (RAA)
11	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash\ p \vee q$	de (10) par (DN)

Résumé des règles

1. supposition : je peux supposer ce que je veux (si j'en tiens compte après)
2. MP : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et aussi "p", je peux écrire "q".
3. MT : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
4. PC : si j'ai supposé "p" et après montré "q", je peux écrire "$p \rightarrow q$".
5. DN : si j'ai déjà "$\neg\neg p$", je peux écrire "p" ; si j'ai déjà "p", je peux écrire "$\neg\neg p$".
6. RAA : si j'ai supposé "p" et montré qu'il s'ensuit "q" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
7. $\wedge$**I** : si j'ai déjà "p" et "q", je peux écrire "$p \wedge q$".
8. $\wedge$**E** : si j'ai déjà "$p \wedge q$", je peux écrire "p" et aussi écrire "q".
9. $\vee$**I** : si j'ai déjà "p", je peux écrire "$p \vee q$" ; si j'ai déjà "q", je peux écrire "$p \vee q$".
10. $\vee$**E** : si j'ai montré "$p \vee q$" et que "r" s'ensuit de "p" et que "r" s'ensuit de "q", je peux écrire "r".
11. $\leftrightarrow$ **I** : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow p$", je peux écrire "$p \leftrightarrow q$".
12. $\leftrightarrow$ **E** : si j'ai déjà "$p \leftrightarrow q$", je peux écrire "$p \rightarrow q$" et aussi écrire "$q \rightarrow p$".

Théorèmes et séquents

L'expression "$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\ \vdash\ \psi$" est appelé un 'séquent', représente le schéma d'une inférence et peut être dit 'valide' ou 'non valide'.

"$\vdash \psi$" dit que ψ est un théorème.

Théorème 1 (Théorème de déduction). *ψ peut être déduite de ϕ si et seulement si $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est un théorème.*