La méthode des arbres

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Feuille d'accompagnement pour le cours du 13 janvier 2004

Points à retenir du dernier cours

1. L'alphabet d'une langue pour la logique des prédicats contient des connecteurs, le signe d'identité, des variables, des quantificateurs, des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes individuelles. Les trois dernières catégories composent les signes non-logiques de la langue.
2. Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle ne se trouve pas partout dans la portée d'un quantificateur correspondant.
3. Une structure pour une telle langue consiste d'un univers de discours et d'une interprétation de ses signes non-logiques.
4. Une interprétation d'une constante lui assigne un élément de l'univers de discours ; l'interprétation d'un signe de relation lui assigne une relation dans cet univers ; et l'interprétation d'un signe de fonction lui assigne une fonction de cet univers dans cet univers.
5. Une assignation de valeurs dans une structure assigne à toute variable de la langue un élément de l'univers de discours.
6. La notion clef de la sémantique de la logique des prédicats est celle de la satisfaction d'une phrase ouverte par une assignation de valeurs dans une structure.
7. Une phrase ouverte est satisfiable dans une structure si elle est vraie sous une assignation de valeurs dans cette structure.
8. Une formule est vraie dans une structure si elle est et seulement si elle est vraie sous toutes les assignations de valeurs dans cette structure. Une telle structure est appelée un 'modèle' de la formule.
9. Une formule est valide si elle est et seulement si elle est vraie dans toutes les structures.
10. L'ordre des quantificateur est important : "$\exists y \forall x Rxy$" implique formellement "$\forall x \exists y Rxy$", mais la converse est fausse.

Les phrases quantifiées

Théorème 1. *Soit $\mathcal{A}$ une structure dont l'univers de discours $|\mathcal{A}|$ est fini et $\phi(x)$ une formule qui contient une occurrence libre de la variable "x". Nous avons les équivalences sémantiques suivantes :*

$$\begin{array}{lcl} \forall x(\phi(x)) & \Longleftrightarrow & \phi(a_1) \wedge \phi(a_2) \wedge \cdots \wedge \phi(a_n) \\ \exists x(\phi(x)) & \Longleftrightarrow & \phi(a_1) \vee \phi(a_2) \vee \cdots \vee \phi(a_n) \end{array}$$

où "a_1", "a_2", ..., 'a_n" sont des constantes individuelles désignant tous les membres de $|\mathcal{A}|$.

F10 Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\phi(a)$, pour une constante individuelle "a", sont vraies.

F11 Si une quantification universelle $\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\phi(a)$ est fausse.

F12 Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\phi(a)$ est vraie.

F13 Si une quantification existentielle $\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\phi(a)$ sont fausses.

La méthode des arbres pour la logique des prédicats

$$\ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner$$

$$\ulcorner \phi(a_1) \urcorner$$
$$\ulcorner \phi(a_2) \urcorner \qquad \text{pour toutes les constantes “}a_i\text{” apparaissant sur cette branche}$$
$$\ulcorner \phi(a_3) \urcorner$$
$$\vdots$$

$$\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$$

$$\ulcorner \phi(a_1) \urcorner \qquad \ulcorner \phi(a_2) \urcorner \qquad \ldots \qquad \ulcorner \phi(b) \urcorner$$

pour toutes les constantes “a_i” de la branche et une nouvelle constante “b”

$$\ulcorner \neg\forall x(\phi(x)) \urcorner$$

$$\ulcorner \neg\phi(a_1) \urcorner \qquad \ulcorner \neg\phi(a_2) \urcorner \qquad \ldots \qquad \ulcorner \neg\phi(b) \urcorner$$

pour toutes les constantes “a_i” de la branche et une nouvelle constante “b”

$$\ulcorner \neg\exists x(\phi(x)) \urcorner$$

$$\ulcorner \neg\phi(a_1) \urcorner$$
$$\ulcorner \neg\phi(a_2) \urcorner \qquad \text{pour toutes les constantes “}a_i\text{” apparaissant sur cette branche}$$
$$\ulcorner \neg\phi(a_3) \urcorner$$
$$\vdots$$

1. connecteurs
2. $\exists$, $\neg\forall$ – nouvelles branches pour toutes les constantes
3. $\forall$, $\neg\exists$ – instanciations pour toutes les constantes
4. connecteurs
5. $\exists$, $\neg\forall$
6. $\forall$, $\neg\exists$
7. ...

Quelques exemples

$\exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy)$

$\exists x \forall y\ (Rxy)$
$\exists x \forall y\ \neg(Rxy)$

$\forall y\ (Ray)$

- $\forall y \neg(Ray)$
  - Raa
  - $\neg Raa$
  - ∇
- $\forall y \neg(Rby)$
  - Raa
  - Rab
  - $\neg Rba$
  - $\neg Rbb$

$\neg \forall x\ (Rxx \rightarrow \exists y Rxy)$

$\neg(Raa \rightarrow \exists y Ray)$

Raa
$\neg \exists y Ray$

$\neg Raa$

$\forall x \exists y\ Rxy$

$\exists y Ray$

- Rab, $\exists y Rby$
  - Rbc, $\exists y Rcy$
    - Rcd, $\exists y Rdy$
    - Rcc
  - Rbb
- Raa

Les individus arbitraires

$$\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner$$

$$|$$

$\ulcorner \phi(b) \urcorner$ pour une nouvelle constante “b”

$$\ulcorner \neg\forall x(\phi(x)) \urcorner$$

$$|$$

$\ulcorner \neg\phi(b) \urcorner$ pour une nouvelle constante “b”

$$\forall x \exists \ (Rxy)$$
$$\exists y Ray$$
$$|$$
$$Rab$$
$$\exists y Rby$$
$$|$$
$$Rbc$$
$$\exists y Rcy$$
$$|$$
$$Rcd$$
$$\exists y Rdy$$
$$|$$
$$Rde$$
$$\exists y Rey$$
$$|$$
$$\vdots$$