# Dixième leçon

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Philipp Keller

A lire pour le cours du 20 janvier 2004

## 1 Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

Après avoir donné les définitions du langage $\mathcal{L}^+$ et des notions clefs de la sémantique des prédicats, nous étudierons dans cette leçon deux calculs syntaxiques pour prouver des théorèmes de la logique des prédicats. Le premier calcul est un calcul hilbertien, qui consiste en quelques axiomes et deux règles d'inférences. La deuxième méthode syntaxique est une extension de la méthode des arbres pour la logique propositionnelle, avec quatre règles supplémentaires pour les phrases quantifiées et leurs négation.

Avant de pouvoir donner les axiomes du calcul hilbertien, cependant, nous pouvons nous fournir de quelques autres notions syntaxiques.

La notion d'une assignation de valeurs modifiée à la place "$x_i$" nous permet de dire quand une assignation de valeurs satisfait une phrase universellement ou existentiellement quantifiée. Nous pouvons définir des notions analogues en syntaxe : la substitution d'un terme dans un autre terme et dans une formule.

**Définition 1.** *Si "$s$" et "$t$" sont des termes et "$x_i$" une variable, nous définissons un nouveau terme, que nous appelons* 'la substitution de "$x_i$" par "$t$" dans "$s$" ' *ou* " "$s(x_i/t)$" ", *d'une manière récursive comme suit :*

1. *Si "$s$" est la même variable que "$x_i$", alors "$s(x_i/t)$" est "$t$".*
2. *Si "$s$" est une variable autre que "$x_i$", alors "$s(x_i/t)$" est "$s$".*
3. *Si "$s$" est une constante, alors "$s(x_i/t)$" est "$s$".*
4. *Si "$s$" est un terme pour une valeurs de fonction "$f_j(t_1, \dots, t_{\mu(j)})$" pour des termes "$t_1$", ..., "$t_{\mu(j)}$", alors "$s(x_i/t)$" est "$f_j(t_1(x_i/t), \dots, t_{\mu(j)}(x_i/t))$".*

En bref, toute occurrence de "$x_i$" dans "$s$" est remplacée par "$t$". Nous pouvons maintenant définir ce qu'est la substitution d'un terme pour un autre dans une formule :

**Définition 2.** *Si $\phi$ est une formule, "$t$" un terme et "$x_i$" une variable, nous définissons une nouvelle formule, que nous appelons* 'le résultat de la substitution de "$x_i$" pour "$t$" dans $\phi$' *ou* "$\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$", *d'une manière récursive comme suit :*

1. *Si $\phi$ est "$t_1 \doteq t_2$" pour deux termes "$t_1$" et "$t_2$", alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est "$t_1(x_i/t) \doteq t_2(x_i/t)$".*
2. *Si $\phi$ est "$R_i(t_1, \dots t_{\lambda(i)})$" pour un signe de relation "$R_i$" et des termes "$t_1$", ..."$t_{\lambda(i)}$", alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est "$R_i(t_1(x_i/t), \dots t_{\lambda(i)}(x_i/t))$".*
3. *Si $\phi$ est $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ pour une formule $\psi$, alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est $\ulcorner\neg\psi(x_i/t)\urcorner$.*
4. *Si $\phi$ est $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \to \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ pour des formules $\psi$ et $\chi$, alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est $\ulcorner\psi(x_i/t) \wedge \chi(x_i/t)\urcorner$, $\ulcorner\psi(x_i/t) \vee \chi(x_i/t)\urcorner$, $\ulcorner\psi(x_i/t) \to \chi(x_i/t)\urcorner$ ou $\ulcorner\psi(x_i/t) \leftrightarrow \chi(x_i/t)\urcorner$ respectivement.*

*5. Si $\phi$ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$ pour une formule $\psi$ et une variable "$x_j$", alors*

$$\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner := \begin{cases} \ulcorner\forall x_j\psi(x_i/t)\urcorner & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases} \qquad \ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner := \begin{cases} \ulcorner\exists x_j\psi(x_i/t)\urcorner & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases}$$

Nous remplaçons toute occurrence libre de la variable "$x_i$" par le terme "$t$". Si "$x_i$" n'a aucune occurrence libre dans $\phi$, $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ est la même formule que $\phi$. S'il est clair du contexte que $\phi$ contient au moins une occurrence libre de "$x$", nous écrivons $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ pour $\ulcorner\phi(x/a)\urcorner$.

En substituant des termes pour des variables à leurs occurrences libres, nous devons faire attention à ne pas lier une variable qui ne l'était pas auparavant. Soit $\phi$ la formule "$\exists y(x \neq y)$". Si une structure a un domaine contenant plus qu'un seul individu, il y aura toujours une assignation de valeurs à "$x$" qui satisfait cette phrase ouverte. Si nous substituons une autre variable "$z$" pour "$x$" dans $\phi$, nous obtenons "$\exists y(z \neq y)$", formule qui est également satisfiable dans toutes les structures à plus d'un individu – $\ulcorner\phi(z/x)\urcorner$ sera vraie si et seulement si $\phi$ l'est également.

En substituant "$y$" pour "$x$", cependant, nous obtenons un autre résultat : la formule "$\exists y(y \neq y)$" est une phrase complète, vraie dans aucune structure. Le diagnostic de ce changement dramatique est que l'occurrence de la variable "$x$", libre dans $\phi$, a été liée dans $\ulcorner\phi(y/x)\urcorner$ – et nous devons exclure ce cas pour les substitutions admissibles.

Nous disons alors que l'occurrence de la variable "$x$" dans $\phi$, bien qu'elle était libre, n'était pas *libre pour "$y$"* et adoptons la définition suivante :

**Définition 3.** *Soit $\phi$ une formule, "$t$" un terme et "$x_i$" une variable. Nous disons que "$t$"* est libre pour "$x_i$" dans $\phi$ *si un des suivants est le cas :*

1. *$\phi$ est une formule atomique ;*
2. *$\phi$ est $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et "$t$" est libre pour "$x_i$" dans $\psi$ ;*
3. *$\phi$ est $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ pour des formules $\psi$ et $\chi$ et "$t$" est libre pour "$x_i$" dans $\psi$ et dans $\chi$ ;*
4. *$\phi$ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$ et ou bien "$x_i$" n'est pas libre dans $\psi$ ou bien "$x_j$" n'a pas d'occurrence dans "$t$" et "$t$" est libre pour "$x_i$" dans $\psi$.*

Une variable n'est pas libre pour une autre dans une formule si une éventuelle substitution de l'une pour l'autre réduisait le nombre total d'occurrences libres de variables dans la formule.

# 2 Un calcul hilbertien pour la logique des prédicats

Même si la syntaxe de leurs deux langues $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^+$ est différente, la logique propositionnelle est dans un certain sens contenue dans la logique des prédicats. Ceci veut dire que nous pouvons, d'une manière complètement analogue à ce que nous avons fait dans la leçon 5, définir des interprétations, maintenant appelées *interprétations propositionnelles*, pour des formules de la logique des prédicats. Nous pouvons alors appeler *tautologie propositionnelle* toute formule de $\mathcal{L}^+$ que l'on obtient en substituant aux propositions simples d'une tautologie de la logique propositionnelle des formules de la logique des prédicats. Une définition un peu plus rigoureuse est la suivante :

**Définition 4.** *Soit $\phi$ une tautologie d'une langue $\mathcal{L}$ pour la logique propositionnelle et "$p_1$", "$p_2$", ... "$p_n$" toutes les propositions simples contenues dans $\phi$. Une* tautologie propositionnelle *d'une langue $\mathcal{L}^+$ de la logique propositionnelle est une formule $\ulcorner\phi(\alpha_1/p_1, \alpha_2/p_2, \ldots, \alpha_n/p_n)\urcorner$ que l'on obtient en substituant à "$p_1$", "$p_2$",... "$p_n$" n'importe quelles formules "$\alpha_1$", "$\alpha_2$", ..., "$\alpha_n$" bien-formées de $\mathcal{L}^+$.*

Il est facile de montrer qu'une tautologie propositionnelle d'une langue $\mathcal{L}^+$ est valide dans la logique des prédicats.

Le calcul hilbértien que nous allons donner pour axiomatiser les formules valides de la logique des prédicats consiste en des axiomes de trois types. Pour que nos axiomes soient valides (et donc le calcul soit correct), il est nécessaire qu'ils soient vraies dans toutes les structures. Par conséquent, leur vérité ne peut pas dépendre d'une interprétation particulière des symboles non-logiques. Le premier type d'axiomes regroupe les formules dont la vérité ne dépend que des connecteurs, le deuxième celles qui sont vraies en vertu de la relation d'identité "$\doteq$", et le troisième finalement les formules qui sont vraies grâce aux quantificateurs qu'elles contiennent.

**Définition 5.** *Les axiomes du calcul* $\mathsf{HC}^+$ *consistent en toutes les formules de* $\mathcal{L}^+$ *suivantes :*

**TP** *toutes les* tautologies propositionnelles *;*

**ID** *les formules qui ont la forme d'un des* axiomes d'identité *suivants (pour des variables "$x$", "$y$", "$z$", , "$w$", "$x_1$", "$x_2$", ..., "$x_{\lambda(i)}$", "$y_1$", "$y_2$", ..., "$y_{\lambda(i)}$", "$z_1$", "$z_2$", ..., "$z_{\mu(j)}$", "$w_1$", "$w_2$", ..., "$w_{\mu(j)}$" et tous les $i \in \mathbf{I}$, $j \in \mathbf{J}$) :*

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{ID_1}$ | $x \doteq x$ | *réflexivité* |
| $\mathbf{ID_2}$ | $y \doteq z \rightarrow (y \doteq w \rightarrow z \doteq w)$ | *confluence* |
| $\mathbf{ID_3}$ | $(x_1 \doteq y_1 \wedge \ldots \wedge x_{\lambda(i)} \doteq y_{\lambda(i)}) \rightarrow (R_i(x_1, \ldots, x_{\lambda(i)}) \rightarrow R_i(y_1, \ldots, y_{\lambda(i)}))$ | *indiscernabilité* |
| $\mathbf{ID_4}$ | $(z_1 \doteq w_1 \wedge \ldots \wedge z_{\mu(j)} \doteq w_{\mu(j)}) \rightarrow f_j(z_1, \ldots, z_{\lambda(i)}) \doteq f_j(w_1, \ldots, w_{\mu(j)})$ | *fonctionalité* |

**QU** *les formules $\phi$ qui ont la forme de la proposition suivante, où $\psi$ est une formule et "$t$" est un terme qui est libre pour "$x$" dans $\psi$ :*

**Qu** $\quad \forall x(\psi) \rightarrow \psi(x/t)$ $\qquad$ *instanciation*

$\mathsf{HC}^+$ *a deux règles d'inférences :*

**MP** *la première règle d'inférences de* $\mathsf{HC}^+$ *est modus ponens* $\mathsf{MP}$ *:*

$$\frac{\phi, \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner}{\psi}$$

$\forall$ *la deuxième règle d'inférences de* $\mathsf{HC}^+$ *est appelée "généralisation" ou "$\forall$" :*

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \forall x(\psi)} \quad \text{si "}x\text{" n'a pas d'occurrence libre dans } \phi$$

Les deux premiers axiomes d'identité, $\mathbf{ID_1}$ et $\mathbf{ID_2}$, impliquent que la relation désignée par "$\doteq$" (dans toutes les structures) est une relation d'équivalence, c'est-à-dire une relation qui est réflexive, transitive et symmétrique.[1] Le principe d'indiscernabilité des identiques est parfois appelée "loi de Leibniz".[2] Le principe de fonctionalité nous assure que nos signes de fonctions désignent réellement des fonctions, c'est-à-dire que leurs valeurs sont uniquement déterminées par leurs arguments.[3] $\mathbf{ID_3}$ et $\mathbf{ID_4}$ ensemble nous permettent de substituer des variables qui sont assignées au même objet dans des formules atomiques.

Comme les variables et les signes de relations et de fonctions dans $\mathbf{ID_1}$ à $\mathbf{ID_4}$ ne sont pas spécifiées, il s'agit de schémas d'axiomes, schémas qui déterminent chacun une infinité d'axiomes : $\mathbf{ID_1}$, par exemple, nous donne un axiome pour chaque variable dans notre langue et $\mathbf{ID_3}$ en plus pour chaque signe de relation.

[1] La symmétrie s'ensuit de la confluence et en échangeant "$y$" pour "$z$" ; la réflexivité nous assure de l'antécédent. La transitivité s'ensuit de la confluence et de la symmétrie, en remplaçant "$y$" par "$z$" et "$z$" par "$y$" – la symmétrie nous permet alors de changer "$z$" et "$y$" dans l'antécédent.

[2] Sa converse, beaucoup plus controversée en métaphysique, est l'identité des indiscernibles qui nous permet d'identifier tout ce qui ne peut pas être distingué.

[3] Comme l'on a vu dans la leçon 2, ceci veut dire que l'argument d'une fonction *détermine* sa valeur. Mathématiquement, une fonction qui relie deux ensembles, $f : A \rightarrow B$, est une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à $A$ et le deuxième à $B$ ($\{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$), qui est telle que le choix de $a$ détermine celui de $b$ : il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b' \rangle$ et $\langle a, b'' \rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents : $(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \rightarrow b' = b''\}$.

**Qu** nous dit que nous pouvons toujours instancier une variable universellement quantifiée par un terme. Pour voir pourquoi la restriction aux termes qui sont libres pour la variable est nécessaire, considérons la formule "$\exists y(y \neq x)$" – dans cette formule, "$y$" n'est pas libre pour "$x$". Nous ne pouvons donc pas dériver de **Qu** que la phrase suivante est un axiome :

$$\forall x \exists y(y \neq x) \rightarrow \exists y(y \neq y) \tag{1}$$

Il est avantageux que (1) ne soit pas un axiome, parce que (1) n'est pas valide : il existent des structures avec plus de deux éléments (et donc l'antécédent est vraie), mais qui ne contiennent pas d'individus qui manquent d'être identique à eux-mêmes (aucune structure ne contient de tels élément, ou autrement le premier axiome d'identité ne serait pas valide).

La validité de **Qu** dépend du fait qu'une formule de la logique de prédicats est valide si et seulement si sa clôture universelle l'est aussi. **Qu** nous donne trois autres règles d'inférences dérivées suivantes, qui peuveut aussi être montrées valides. Prises ensemble, il s'agit des règles d'inférences pour l'introduction et l'élimination des quantificateurs que nous utiliserons pour la déduction naturelle :

**GU** généralisation universelle :

$$\frac{\phi}{\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner} \quad \text{si "}x\text{" n'a pas d'occurrence libre avant l'application de cette règle}$$

**SU** spécialisation universelle :

$$\frac{\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner}{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner} \quad \text{si "}t\text{" est libre pour "}x\text{" dans } \phi$$

**GE** généralisation existentielle :

$$\frac{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner}{\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner} \quad \text{si "}t\text{" est libre pour "}x\text{" dans } \phi$$

**SE** spécialisation existentielle :

$$\frac{\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner}{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner} \quad \text{si "}x\text{" n'a pas d'occurrence libre avant l'application de cette règle}$$

Nous reviendrons sur ces règles d'inférences en connection avec la méthode de la déduction naturelle pour la logique des prédicats.

# 3 Les phrases quantifiées

Nous avons remarqué que, étant donné un univers de discours, une quantification universelle est vraie si la phrase ouverte gouvernée par le quantificateur universel est vraie de tous les objets dans cet univers de discours. Nous avons également dit qu'une phrase ouverte conjonctive est vraie d'un objet si cet objet et seulement si cet objet satisfait les deux phrases ouvertes qui forment la conjonction. Une phrase qui est gouvernée par un quantificateur existentiel, par contre, dit qu'au moins un objet dans l'univers de discours satisfait la phrase ouverte. Une disjonction de phrases ouvertes est également satisfaite si un objet de l'univers de discours satisfait au moins un de ses disjoints. Nous sommes ainsi amenés à l'observation suivante :

**Théorème 6.** *Soit $\mathcal{A}$ une structure dont l'univers de discours $|\mathcal{A}| = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est fini et $\ulcorner \phi(x) \urcorner$ une formule qui contient une occurrence libre de la variable "$x$". Nous avons les équivalences* *sémantiques suivantes :*

$$\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner \iff \ulcorner\phi(a_1)\wedge\phi(a_2)\wedge\cdots\wedge\phi(a_n)\urcorner$$
$$\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner \iff \ulcorner\phi(a_1)\vee\phi(a_2)\vee\cdots\vee\phi(a_n)\urcorner$$

*où "$a_1$", "$a_2$", ..., '$a_n$" sont des constantes individuelles désignant tous les membres de $|\mathcal{A}|$.*

PREUVE Ceci s'ensuit de nos conditions de vérité **S3** et **S8** pour qu'une formule soit vraie dans une structure. □

Une quantification universelle sur un domaine fini est équivalente à une conjonction, une quantification existentielle sur un tel domaine est équivalente à une disjonction. La restriction aux univers de discours finis est importante parce que notre langage ne considère pas des conjonctions ou disjonctions "infinies" comme bien-formées.

Ne considérant que des structures avec des domaines finies, la définissabilité est mutuelle : une conjonction est vraie si tous et seulement si tous ses conjoints sont vrais ; une disjonction est vraie si au moins un et seulement si au moins un de ses disjoints est vrai. Si nous appelons une *instanciation* d'une phrase (universellement ou existentiellement) quantifiée toute formule qui résulte de la phrase ouverte en remplaçant la variable gouvernée par le quantificateur par une constante individuelle, nous pouvons constater le suivant :

**F10** Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$, pour une constante individuelle "$a$", sont vraies.

**F11** Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est fausse.

**F12** Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est vraie.

**F13** Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ sont fausses.

Comme nous l'avons fait pour la logique propositionnelle, nous utiliserons ces faits pour construire des arbres testant la consistance d'une certaine proposition ou d'un certain ensemble de propositions appartenant au langage de la logique des prédicats.

# 4 La méthode des arbres pour la logique des prédicats

En analogie avec les règles de construction d'arbres pour la conjonction et la disjonction, nous adoptons, motivés par **F10**, la règle suivante pour les phrases universellement quantifiées :

$$\begin{array}{cl} \ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner & \\ | & \\ \ulcorner\phi(a_1)\urcorner & \\ \ulcorner\phi(a_2)\urcorner & \text{pour toutes les constantes "}a_i\text{" apparaissant sur cette branche} \\ \ulcorner\phi(a_3)\urcorner & \\ \vdots & \end{array}$$

La vérité d'une quantification universelle nous commet à la vérité de toutes ses instanciations. Il est important que le quantificateur universel soit instancié pour *toutes* les constantes qui apparaissent sur la branche, y inclus les constantes qui n'apparaissent seulement plus tard. La raison pour ceci est qu'une branche qui ne se ferme pas est censée représenter un modèle pour la formule en question – c'est pourquoi la méthode des arbres est une méthode pour tester la consistance d'une formule ou d'un ensemble de formules. Or, nous n'avons pas de garantie d'avoir décrit un modèle pour la formule universellement quantifiée en question avant que nous l'avons instanciée pour toutes les constantes que nous utilisons pour décrire le modèle en question. Si nous introduisons une nouvelle constante après avoir appliqué la règle du quantificateur universel, par exemple par une application de la règle pour le quantificateur existentiel que l'on discutera après, nous devons revenir en arrière et faire l'instanciation correspondente.

Comme le montre **F12**, une quantification existentielle nous donne le droit de choisir l'élément de l'univers de discours qui instancie la phrase ouverte existentiellement quantifiée. Nous pouvons donc adopter comme règle de construction d'arbres la suivante :

$$\begin{array}{c}
\ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner \\
\swarrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \\
\ulcorner \phi(a_1) \urcorner \quad \ulcorner \phi(a_2) \urcorner \quad \ldots \quad \ulcorner \phi(b) \urcorner
\end{array}$$

pour toutes les constantes "$a_i$" de la branche et une nouvelle constante "$b$"

Si notre branche contient deux constantes individuelles, par exemple, cet règle nous dit d'ouvrir trois nouvelles branches.

Nous instancions la quantification existentielle avec toutes les constantes apparaissant sur la branche : si nous omettions une, nous ne pourrions pas conclure l'insatisfiabilité de la phrase ouverte existentiellement quantifiée du fait que toutes les branches se ferment – au moins une possibilité n'aurait pas été considérée. Nous avons également besoin d'une nouvelle constante ("nouvelle" dans le sens qu'elle n'apparaît nulle part sur la branche avant l'application de la règle) pour ne pas devoir conclure que les trois propositions "$Pa$", "$Pb$" et "$Pc$" soient inconsistantes avec "$\exists x \neg Px$" – le fait que tous les éléments considérés de l'univers de discours étaient $P$ ne veut pas dire qu'il n'y ait aucun qui n'est pas $P$ !

Etant donné l'interdéfinissabilité des connecteurs, **F11** et **F13**, les règles de construction d'arbres pour les négations de phrases quantifiées s'ensuivent de ceux pour les quantificateurs opposés. Pour la négation d'un quantificateur universel, nous avons :

$$\begin{array}{c}
\ulcorner \neg\forall x(\phi(x)) \urcorner \\
\swarrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \\
\ulcorner \neg\phi(a_1) \urcorner \quad \ulcorner \neg\phi(a_2) \urcorner \quad \ldots \quad \ulcorner \neg\phi(b) \urcorner
\end{array}$$

pour toutes les constantes "$a_i$" de la branche et une nouvelle constante "$b$"

Pour la négation d'une phrase existentiellement quantifiée, nous avons une variante de la règle pour le quantificateur universel :

$$\begin{array}{c}
\ulcorner \neg\exists x(\phi(x)) \urcorner \\
| \\
\ulcorner \neg\phi(a_1) \urcorner \\
\ulcorner \neg\phi(a_2) \urcorner \\
\ulcorner \neg\phi(a_3) \urcorner \\
\vdots
\end{array}$$

pour toutes les constantes "$a_i$" apparaissant sur cette branche

Comme ces règles pour les quantificateurs nous obligent à prendre en compte toutes les constantes individuelles apparaissant sur une branche, l'ordre de leur application devient important. Pour faire l'arbre d'une proposition ou d'un ensemble de propositions, nous appliquons d'abord toutes les neuf règles pour la logique propositionnelle. Ensuite, nous appliquons les règles pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel, c'est-à-dire les règles qui multiplient le nombre de branches. A ces nouvelles branches, nous appliquons les règles pour le quantificateur universel et la négation du quantificateur existentiel, c'est-à-dire les règles qui nécessitent la considération de toutes les constantes apparaissant sur la branche. Si nous pouvons alors fermer toutes les branches de l'arbre résultant, nous pouvons conclure que l'ensemble de propositions initial est consistant. Autrement, nous cherchons des connecteurs que nous n'avons pas encore traités et répétons la procédure. Représentée schématiquement, la procédure est donc la suivante :

1. Est-ce qu'il y a des connecteurs reliant des phrases complètes ? Appliquons les règles pour les connecteurs.
2. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par "$\exists$" ou par "$\neg\forall$" ? Appliquons les règles correspondantes pour ouvrir de nouvelles branches pour toutes les constantes et une nouvelle.
3. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par "$\forall$" ou par "$\neg\exists$" ? Appliquons les règles correspondantes pour faire des instanciations pour toutes les constantes.
4. Est-ce qu'il y a des connecteurs reliant des phrases complètes ? Retournons à l'étape 1).
5. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par "$\exists$" ou par "$\neg\forall$" ? Retournons à l'étape 2).
6. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par "$\forall$" ou par "$\neg\exists$" ? Retournons à l'étape 3).
7. L'arbre est entièrement développé quand aucune règle pour des connecteurs est applicable, nous avons crées de nouvelles branches pour toutes les formules commençant par "$\exists$" ou par "$\neg\forall$" et toutes les constantes sur les branches correspondantes, et nous avons rajouté toutes les instanciations des formules commençant par "$\forall$" ou par "$\neg\exists$" pour toutes les constantes sur les branches correspondantes.

Considérons, par exemple, la formule "$\exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy)$". Nous commençons à construire son arbre en appliquant la règle pour la conjonction :

$$
\begin{array}{c}
\exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
\exists x \forall y\ (Rxy) \\
\exists x \forall y\ \neg(Rxy)
\end{array}
$$

A ce stade, nous appliquons la règle pour le quantificateur existentiel à la première de nos deux formules existentiellement quantifiées, c'est-à-dire avec "$\exists x \forall y\ (Rxy)$". Comme notre seule branche ne contient aucune constante individuelle, nous n'avons qu'à introduire une nouvelle constante, que nous abrégeons par "$a$" :

$$
\begin{array}{c}
\exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
\exists x \forall y\ (Rxy) \\
\exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
\forall y\ (Ray)
\end{array}
$$

D'après nos règles de procédure, nous devons traiter le deuxième quantificateur existentiel "$\exists x \forall y\ \neg(Rxy)$" avant d'appliquer la règle pour le quantificateur universel. Nous introduisons alors une nouvelle constante, "$b$" et instancions la deuxième quantification existentielle également avec notre ancienne constante "$a$", obtenant deux branches :

$$
\begin{array}{c}
\exists x \forall y\ (Rxy) \land \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
\exists x \forall y\ (Rxy) \\
\exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
\forall y\ (Ray) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\forall y \neg(Ray) \qquad \forall y \neg(Rby)
\end{array}
$$

Sur la branche gauche, nous n'avons qu'une seule constante, "$a$" : les deux instanciations des quantifications universelles "$\forall y\ (Ray)$" et "$\forall y \neg(Ray)$" nous donnent donc "$Paa$" et "$\neg Paa$" – la branche se ferme. A droite, nous avons deux constantes et obtenons "$Paa$" et "$Pab$" de la première quantification universelle "$\forall y\ (Ray)$" et "$\neg Pba$" et "$\neg Pbb$" de la deuxième, "$\forall y \neg(Ray)$" – la branche ne se ferme pas. Nous sommes arrivés à l'arbre suivant :

$$
\begin{array}{c}
\exists x \forall y\ (Rxy) \land \exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
\exists x \forall y\ (Rxy) \\
\exists x \forall y\ \neg(Rxy) \\
| \\
\forall y\ (Ray) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\forall y \neg(Ray) & \forall y \neg(Rby) \\
| & | \\
Raa & Raa \\
 & Rab \\
| & | \\
\neg Raa & \neg Rba \\
\nabla & \neg Rbb
\end{array}
\end{array}
$$

Nous ne pouvons plus appliquer aucune règle à la branche droite et nous avons trouvé un modèle pour la proposition "$\exists x \forall y\ (Rxy) \land \exists x \forall y\ \neg(Rxy)$" – une structure $\mathcal{A}$, où $R^{\mathcal{A}}$ relie $a$ à $a$ et $a$ à $b$ et rien d'autre. Un modèle pour la proposition initiale serait donc par exemple une structure qui consiste d'un univers de discours de deux personnes, Sam et Marie, et d'une relation exprimée par "$x$ aime $y$" qui est telle que Sam aime soi-même et Marie, et Marie ne s'aime pas et n'aime pas non plus Sam.

Comme il est le cas pour la méthode des arbres pour la logique propositionnelle, nous pouvons également utiliser la méthode pour vérifier la validité d'une proposition : une proposition sera valide si et seulement si sa négation est inconsistante, c'est-à-dire si toutes les branches de l'arbre pour cette négation se ferment.

Vérifions, par exemple, la validité de la proposition "$\forall x\ (Rxx \rightarrow \exists y Rxy)$". Cette proposition ne contient aucune constante individuelle – c'est pourquoi nous commençons par l'instancier avec une nouvelle constante "$a$" et nous appliquons la règle pour les formules $\ulcorner \neg(\phi \rightarrow \psi) \urcorner$ :

$$\neg\forall x\ (Rxx \to \exists y Rxy)$$

$$\neg(Raa \to \exists y Ray)$$

$$Raa$$
$$\neg\exists y Ray$$

Comme "$a$" est la seule constante, l'instanciation nous donne "$Paa$" et nous pouvons fermer la (seule) branche :

$$\neg\forall x\ (Rxx \to \exists y Rxy)$$

$$\neg(Raa \to \exists y Ray)$$

$$Raa$$
$$\neg\exists y Ray$$

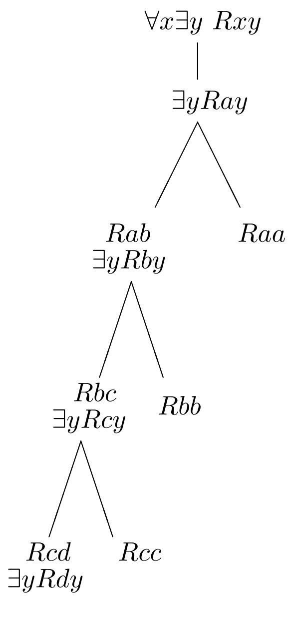
$$\neg Raa$$

La branche unique est fermée : la proposition est inconsistante et sa négation est valide.

# 5 Les individus arbitraires

La règle de branchement pour le quantificateur existentiel (et la négation du quantificateur universel) et la règle d'instanciation pour le quantificateur universel (et la négation du quantificateur existentiel) peuvent interférer l'une avec l'autre, de sorte que la première nous force à introduire de nouvelles constantes que la seconde nous force d'utiliser dans des instanciations et ainsi de suite.

Considérons la proposition "$\forall x \exists y Rxy$" et faisons son arbre. Nous voyons très vite que nous y arriverons jamais au bout :



L'arbre qui en résulte est infini dans deux direction : il contient une branche infini (celle tout à gauche) et il contient un nombre infini de branche. Nous observons aussi que les branches partant à droite n'ajoutent rien : la nouvelle constante "$b$", par exemple, introduit après le premier branchement, peut nous servir également pour représenter la vielle constante "$a$" – si nous le voulons, nous sommes libres de l'interpréter par le même individu que nous utilisons pour interpréter "$a$". Nous arrivons donc aux simplifications suivantes pour nos règles de branchement :

$$\begin{array}{l} \ulcorner \exists x(\phi(x))\urcorner \\ \quad | \\ \ulcorner \phi(b)\urcorner \quad \text{pour une nouvelle constante "}b\text{"} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \ulcorner \neg\forall x(\phi(x))\urcorner \\ \quad | \\ \ulcorner \neg\phi(b)\urcorner \quad \text{pour une nouvelle constante "}b\text{"} \end{array}$$

Avec ces nouvelles règles, notre arbre n'est infini que dans la direction verticale :

$$\begin{array}{c} \forall x\exists\ (Rxy) \\ \exists yRay \\ | \\ Rab \\ \exists yRby \\ | \\ Rbc \\ \exists yRcy \\ | \\ Rcd \\ \exists yRdy \\ | \\ Rde \\ \exists yRey \\ | \\ \ldots \end{array}$$

# 6 Les termes singuliers

Une lacune dans une phrase ouverte indique la place où un terme singulier a été enlevé et les quantificateurs nous servent à quantifier sur ces lacune, en disant que toutes les choses ou au moins une chose satisfait la phrase ouverte en question. Mais qu'est-ce que sont ces termes singuliers ?

Nous avons dit qu'un terme singulier est un terme qui désigne au maximum une chose, chose qui est appelée sont "référent" ou, plus généralement, sa "désignation". Les variables, sous une assignation de valeurs, reçoivent aussi une désignation et peuvent ainsi également être compté sous la catégorie de termes singuliers. A part des variables, nous reconnaissons au moins deux autres types de termes singuliers : les noms propres et les descriptions définies.

Les noms propres, comme "Maria", "Genève" et "Frege" désignent au plus un individu. Dans beaucoup de cas, ils sont introduit par un acte de baptême qui établit une relation avec leur référent. Ils ne nous servent qu'à parler de leur référent et ne nous fournissent aucune autre information sur leur référent. Dans le cas où un nom propre n'a pas de référent, le nom ne remplis pas sa fonction : il est dénué d'intérêt et appelé *vide*.

Les descriptions définis, par contre, désignent leur référent par l'intermédiaire de leur contenu descriptif : même si nous ne savons peut-être pas qui est la personne la plus riche au monde, nous savons au moins que le référent de "la personne la plus riche au monde" est la personne la plus riche au monde, qu'elle est plus riche que moi, qu'elle est une personne etc.

Une déscription définie telle que "le président des Etats-Unis" ou "le roi de la France" est un terme singulier, c'est-à-dire une expression qui désigne ou a comme référent au plus un seul individu. Mais que dire des cas ou cet individu n'existe pas, comme il est le cas avec l'expression "le roi de la France" ? Quelle valeur de vérité faut-il attribuer à une phrase comme :

Le roi de la France est chauve. (2)

Russell, dans son article "On Denoting" (1905) répondait à cette question en donnant la forme logique suivante à (2) :

$$\exists x(RFx \wedge Cx \wedge \forall y(RFy \rightarrow x \doteq y)) \tag{3}$$

Traduit littéralement, (3) dit qu'il y ait un individu qui est le roi de la France ($RF$) et qui est chauve ($C$) et que tout individu $y$ qui est le roi de la France est identique à $x$. (2) est donc interpreté comme disant qu'il y a au moins un roi de la France et qu'il est chauve et est donc faux si, comme il est le cas, la France est une république.

Cependant, l'interprétation des descriptions définies n'est pas toujours aussi triviale. Considérons les phrases suivante :

Je croyais votre yacht plus grand qu'il ne l'est. (4)

Il est possible qu'il y a plus d'hommes qu'il y en a. (5)

Il me semble que le nombre des planètes est plus grand que 10. (6)

A première vue, toutes ces trois affirmations sont sensibles et pourraient bien être vraies. Mais tous permettent une interprétation selon laquelle ils sont faux :

Je croyais que la taille de votre yacht $\neq$ la taille de votre yacht. (7)

Il est possible que le nombre des hommes $>$ le nombre des hommes. (8)

Il me semble que 9>10. (9)

Heureusement, ils permettent, cependant, aussi une autre interprétation :

La taille de votre yacht $\doteq n$ et j e croyais que la taille de votre yacht $\neq n$. (10)

Le nombre des hommes $\doteq n$ et il est possible que le nombre des hommes $> n$. (11)

Il me semble que le nombre des planètes >10. (12)

On dit que les interprétations (7), (8) et (9) donnent une interprétation "étroite" ("narrow scope") aux occurrences de "la taille de votre yacht", "le nombre des hommes", "le nombre des planètes" dans (4), (5), (6) respectivement (l'interprètent comme des occurrences *primaires* dans la términologie de Russell), tandis que les intérpretations (10), (11) et (12) en donnent une intérprétation "large" ("wide scope") et l'interprètent comme des occurrences *secondaires*.

Selon Russell, une telle ambiguité se montre aussi avec les déscriptions définies qui manquent de dénotation. Considérons encore une fois la phrase (2) :

$$\text{Le roi de la France est chauve.} \tag{2}$$

Nous avons vu que Russell a donné la forme logique (3) à (2) :

$$\exists x(RFx \wedge Cx \wedge \forall y(RFy \rightarrow x \doteq y)) \tag{3}$$

Formons maintenant la négation de (2) :

$$\text{Le roi de la France n'est pas chauve.} \tag{13}$$

Pour formaliser (13), nous avons le choix entre deux options :

$$\neg\exists x(RFx \wedge Cx \wedge \forall y(RFy \rightarrow x \doteq y)) \tag{14}$$

("Il n'est pas le cas qu'il y a un unique roi de la France et qu'il est chauve."). La phrase serait donc vraie et l'occurrence de "le roi de la France" serait secondaire ("wide scope"). Mais on pourrait formaliser (13) aussi comme suivant :

$$\exists x(RFx \wedge \neg Cx \wedge \forall y(RFy \rightarrow x \doteq y)) \tag{15}$$

("Il y a un unique roi de la France qui n'est pas chauve.") Cette phrase, où "le roi de la France" a une occurrence primaire ("narrow scope"), est fausse. Le roi de la France n'est ni chauve ni non-chauve puisqu'il n'existe pas :

> "By the law of excluded middle, either "$A$ is $B$" or "$A$ is not $B$" must be true. Hence either "the present King of France is bald" or "the present King of France is not bald" must be true. Yet if we enumerated the things that are bald, and then the things that are not bald, we should not find the present King of France in either list. Hegelians, who love a synthesis, will probably conclude that he wears a wig." (Russell 1905 : 485)

Russell en tirait la conclusion que toutes les propositions à propos du roi de la France peuvent être traitées comme fausses :

> "Thus all propositions in which "the King of France" has a primary occurrence are false ; the denials of such propositions are true, but in them "the King of France" has a secondary occurrence. Thus we escape the conclusion that the King of France has a wig." (Russell 1905 : 490)

La logique des prédicats, en effet, adopte la solution russellienne au problème des descriptions définies et ne les considère pas comme tombants sous la catégorie des constantes individuelles, mais les analyse à l'aide de la quantification. Les seuls termes singuliers qu'elle considère sont donc des variables et des noms propres.

## 7 Les limites de la méthode des arbres

Le fait qu'il est possible que nous construisons, appliquant nos règles, des arbres infinis, montre une différence importante entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats : la logique propositionnelle est décidable et la logique des prédicats ne l'est pas.

## Références