Onzième leçon

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Philipp Keller

A lire pour le cours du 27 janvier 2004

1 Les règles d'introduction et d'élimination de quantificateurs

Pour pouvoir traiter des phrases quantifiées par les méthodes de la déduction naturelle, nous avons besoin de règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs.

Comme nous l'avons fait pour la méthode des arbres, nous nous laissons inspirer par le fait qu'une quantification universelle sur un domaine fini est équivalente à la conjonction de toutes ses instanciations, et qu'une quantification existentielle sur un tel domaine fini correspond à une disjonction de ses instanciations. Éliminer un quantificateur universel revient donc à l'instancier pour tous les membres du domaine. Considérons l'inférence suivante :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les hommes sont mortels.}\\ \text{Socrate est un homme.}\end{array}}{\text{Socrate est mortel.}} \qquad (1)$$

L'inférence valide (1) correspondra à la preuve suivante dans le calcul que nous déveloperons dans cette leçon :

1	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash Ha$	prémisse
2	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash \forall x(Hx \to Mx)$	prémisse
3	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash Ha \to Ma$	de (2) par (SU)
4	$Ha, \forall x(Hx \to Mx)$	$\vdash Ma$	de (1) et (3) avec (MP)

La règle (SU), appelée *spécialisation universelle*, nous permet de passer d'une quantification universelle à n'importe quelle instanciation de la phrase ouverte qui est universellement quantifiée pour une constante. L'élimination du quantificateur universel revient donc à une instanciation de la phrase ouverte qu'il gouverne, remplaçant toutes les occurrences libres d'une variable par des occurrences d'une constante.

Comment pouvons nous *introduire* un quantificateur universel dans une formule ? L'analogie avec la conjonction pourrait nous faire penser qu'il suffirait, pour établir la vérité de "$\forall x(Fx)$", par exemple, de prouver "$F(a_1)$", "$F(a_2)$" et "$F(a_3)$", si nous nous trouvons dans une structure finie ne contenant que les trois objets a_1, a_2 et a_3 dans son domaine. Cette méthode, cependant, ne s'avère aucunement valide. Non seulement elle serait inapplicable dans le cas d'un domaine infini ou un cas où nous ne disposons pas de noms pour tous les objets dans le domaine. Son application signifierait également d'utiliser, à l'intérieur d'une preuve, une information qui ne nous est donnée que de l'extérieur du modèle : même si nous arriverons, comme si par accident, à prouver "Fx" de tous les membres du domaine – et ainsi à prouver, pour toute constante "a", que Fa –, nous n'aurions pas encore prouvé *que "Fx" est vraie de tous les membres du domaines* – pour ceci, nous aurions besoin d'une guarantie que la totalité des individus dont nous avons prouvé "Fx"

est comprend réellement tous les individus du domaine.

Une piste plus promettante nous est désignée par les preuves en mathématiques et l'introduction de nouvelles constantes dans la méthode des arbres. Si un géomètre, par exemple, veut prouver que la somme des angles intérieurs de n'importe quel triangle égale à 180 °, il dessinera au tableau noir un triangle particulier, nommé ABC d'après ses trois coins. S'il ne fait usage, dans sa preuve du théorème, d'aucune propriété de ce triangle autre que celles qui lui sont imposées par la définition même d'un triangle, le théorème vaudra pour tout triangle. Le triangle particulier ABC aura représenté tous les triangles. Dans ce sens-ci, le triangle ABC peut être appelé un 'triangle arbitraire'.

Nous avons fait un pas analogue lorsque nous nous avons rendu compte, dans le développement de la méthode des arbres, qu'il était possible de simplifier les règles pour le quantificateur universel et la négation du quantificateur existentiel, en nous limitant à une seule constante, nouvelle, qui représentait également les anciennes constantes déjà introduites sur la branche correspondante. Au lieu de dire que la constante nouvelle représentait les individus que nous n'avions pas encore considérés dans notre preuve, nous ont simplement dit qu'elle représentait *n'importe quel* individu du domaine, ainsi nous nous servons comme constante désignante un individu arbitraire.

Pour prouver une quantification universelle à partir des prémisses particulières, nous exigerons donc que ces prémisses soient vraies d'un individu arbitraire.[1] Un tel individu nous est fourni par exemple par la règle de spécialisation universelle, comme il est le cas dans la preuve suivante :

1	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash Fa$	de (1) par (SU)
4	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash Fa \rightarrow Ga$	de (2) par (SU)
5	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\vdash \forall x(Gx)$	de (5) avec (GU)

Nous appelerons cette règle, qui nous permet d'établir une proposition générale à partir d'une proposition singulière, qui parle d'un individu arbitraire, *'généralisation universelle'* (GU).

Il est clair, cependant, que nous devons restreindre notre usage de (GU) : la 'preuve' suivante est clairement fallacieuse :

1	Fa	$\vdash Fa$	prémisse
2	Fa	$\vdash \forall x(Fx)$	de (1) par (GU)

Nous ne pouvons pas, du fait qu'un certain individu a soit F conclure que toutes les choses dans l'univers de discours soient F – le a en question doit être 'arbitraire'. Mais qu'est-ce que cela signifie concrètement ? Dans le cas de la méthode des arbres, ceci signifiait que la constante était "nouvelle" pour la branche, c'est-à-dire n'avait pas d'occurrence précédente. Dans le cas du géomètre prouvons des théorèmes sur tous les triangles, ceci signifie que la preuve en question ne dépendait d'aucune assomption particulière sur le triangle, le dernier par conséquent étant considéré paradigmatique ou arbitraire. Dans la déduction naturelle, nous combinons ces deux exigences : la constante en question, "a", ne doit pas apparaître dans aucune supposition ou prémisse dont dépend la preuve de la proposition singulière "Fa".

Comme le sont les règles pour l'introduction et l'élimination de la disjonction comparées à celles pour la conjonction, les règles pour le quantificateur existentiel sont un peu plus compliquées que celles pour le quantificateur universel. Pour introduire le quantificateur existentiel, nous *généralisons* une proposition particulière : si "Fa" est prouvée pour un certain a, alors nous pouvons prouver "$\exists x(Fx)$". La règle d'introduction du quantificateur existentiel est donc appelée

[1] Je préfère cette présentation à celle de Lemmon (1965: 107) qui parle de *noms arbitraires* pour des raisons esquissées dans la leçon trois. Pour une théorie développée des individus arbitraires, voir Fine (1985) .

'généralisation existentielle' (GE). Voici un exemple :

1	$\forall x(Fx)$	$\vdash\ \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx)$	$\vdash\ Fa$	de (1) par (SU)
3	$\forall x(Fx)$	$\vdash\ \exists x(Fx)$	de (2) par (GE)

Même si la constante individuelle "a" que nous introduisons dans l'application de (SU) désigne un individu arbitraire, nous pouvons conclure du fait que cet individu arbitraire est F qu'il y en a au moins un F.[2]

Pour la règle d'élimination du quantificateur existentiel, nous nous rappelons de la règle ($\vee$**E**) : cette règle éliminait une disjonction dans le sens qu'elle nous permettait de prouver quelque chose que l'on avait prouvé à partir des deux disjoints d'une disjonction directement de la disjonction elle-même. D'une manière analogue, la règle d'élimination du quantificateur existentiel nous permet de passer des preuves d'une formule ϕ à partir de toute la série des instanciations "$Fa_1 \vee Fa_2 \vee \ldots \vee Fa_n \vee \ldots$" à une preuve de ϕ directement à partir de "$\exists x(Fx)$".

Au lieu de montrer que ϕ est une conséquence de toutes les instanciations de la quantification universelle, il suffit de montrer qu'elle s'ensuit d'une instanciation *quelconque* – d'une instanciation avec un individu 'arbitraire', où 'arbitraire' veut dire la même chose que dans l'application de la règle de généralisation universelle ((GU), l'introduction du quantificateur universel). Nous appelons cette instanciation le *'disjoint typique'* qui correspond à la quantification existentielle et la règle qui élimine la quantification existentielle en faveur du disjoint typique la règle de *'spécialisation existentielle'* (SE).

Les règles de généralisation universelle (GU) et de spécialisation existentielle (SE) sont intimement liées : non seulement tournent les deux sur la notion d'un individu arbitraire, mais leur applicabilité est réciproque. (GU) est applicable à une proposition ϕ si et seulement si ϕ aurait pu être obtenue, par (SE), de son quantification existentielle. L'application de la règle de spécialisation existentielle comprend quatre étapes :

1. la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
2. la supposition du disjoint typique ;
3. une preuve d'une autre proposition sous la supposition du disjoint typique ;
4. l'application de la règle, avec la conclusion que nous pouvons également prouver la proposition prouvée sous la supposition du disjoint typique à partir des suppositions et prémisses nécessaires pour la preuve de la quantification existentielle ;

Voici, comme exemple, une preuve du séquent "$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx) \vdash \exists x(Gx)$" :

1	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash\ \forall x(Fx \to Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash\ \exists x(Fx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^*\ Fa$	supposition (du disjoint typique)
4	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^*\ Fa \to Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^*\ Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^*\ \exists x(Gx)$	de (5) avec (GE)
7	$\forall x(Fx \to Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash\ \exists x(Gx)$	de (2), (3) et (6) avec (SE)

Étant données les prémisses que tout ce qui est F est également G et qu'il y a quelque chose qui est F, nous supposons, à la ligne (3), qu'un individu arbitraire a est F. Nous démontrons après, sous cette supposition, qu'il y a quelque chose qui est G (ligne 6). De ces deux lignes et de la ligne où nous avons prouvé la quantification existentielle, nous concluons qu'il y a quelque chose qui est

[2] La raison sémantique pour la validité du séquent "$\forall x(Fx) \vdash \exists x(Fx)$" est que nous avons exclu les domaines vides dans notre définition d'une structure pour la logique des prédicats. Nous allons parler d'une 'logique libre' qui ne fait pas cette présupposition dans la prochaine leçon.

G (ligne 7). Dans une application de (SE), nous indiquons trois lignes : celle où nous avons prouvé la quantification existentielle, celle où nous avons fait la supposition du disjoint typique et celle où nous avons montré que la proposition en question peut être démontrée sous cette supposition.

Comme l'indique le parallèlisme entre (SE) et (GU), nous devons également adopter quelques restrictions pour éviter des raisonnements fallacieux comme le suivant :

1	$\exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* Fa$	supposition
3	$\exists x(Fx)$	$\vdash Fa$	de (1), (2) et (2) avec (SE)
4	$\exists x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	de (3) avec (GU)

L'application de (GU) est correcte, puisque "$\exists x(Fx)$" ne contient pas "a". Mais l'application de (SE) est incorrecte, puisque la conclusion prouvée sous la supposition du disjoint typique contient elle-même une occurrence de la constante pour l'individu arbitraire a. Même si "Fa" est une conséquence d'elle-même, il ne s'ensuit pas de "$\exists x(Fx)$" qu'un individu, arbitrairement choisi, est F. Nous devons donc limiter les conclusions obtenues à partir du disjoint typique à des propositions qui portent sur des individus autres que celui qui nous a servi pour l'instanciation.

Cette restriction correspond à l'exigence que, de toutes les propositions que nous dérivons de la supposition du disjoint typiques, seules celles qui ne concernent pas l'individu choisi comme arbitraire sont également des conséquences de la quantification existentielle.

Cette précaution, même si elle est nécessaire, n'est pas encore suffisante. Nous devons également supposer que "a" n'a pas d'occurrence dans les suppositions sous lesquelles est obtenue la conclusion dérivée du disjoint typique. Ceci est montré par le raisonnement fallacieux suivant :

1	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash Fa$	prémisse
3	$\exists x(Fx), Fa$	$Ga \quad \vdash^* Ga$	supposition
4	$\exists x(Fx), Fa$	$Ga \quad \vdash^* Fa \wedge Ga$	de (2) et (3) avec ($\wedge$**I**)
5	$\exists x(Fx), Fa$	$Ga \quad \vdash^* \exists x(Fx \wedge Gx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$	de (2), (3) et (5) avec (SE)

Ce raisonnement est fallacieux parce qu'il ne s'ensuit pas, du fait qu'un individu arbitraire est F et que quelque chose est G, qu'il y a quelque chose qui est en même temps F et G. Le problème est que la conclusion obtenue, à la ligne (5), de la supposition du disjoint typique – bien qu'elle ne contenait pas "a" elle-même – reste sur une supposition, à savoir "Fa", autre que le disjoint typique, qui contient "a". "$\exists x(Fx \wedge Gx)$" a été dérivée en faisant une assomption quelque chose sur l'individu arbitraire en question – qu'il n'était pas seulement G, mais également F.

2 Les règles de la déduction naturelle pour la logique des prédicats

Nous sommes maintenant en mesure de formuler nos règles de déduction naturelle pour les quantificateurs, qui se rajoutent aux règles pour les connecteurs, maintenant interprétées comme gouvernant non seulement des connecteurs propositionnels, mais aussi des connecteurs reliant des phrases ouvertes.

2.1 L'élimination du quantificateur universel et l'introduction du quantificateur existentiel

Soit ϕ une formule de $\mathcal{L}^+$, "x" une variable et "t" un terme qui est *libre pour "x" dans* ϕ.[3] Soit $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ le résultat de la substitution (uniforme) de "t" pour "x" dans ϕ. La règle de *'spécialisation universelle'* (SU) nous donne alors le droit de conclure $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ à partir de $\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	de (m) avec (SU)

La règle de *'généralisation existentielle'* (GE) est la converse de (SU) : elle nous donne le droit d'inférer $\ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$ à partir de $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$.

m	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$	de (m) avec (GE)

Dans les deux cas, d'éventuelles suppositions ou prémisses à la ligne (m) sont conservées à la ligne (n).

2.2 L'introduction du quantificateur universel et l'élimination du quantificateur existentiel

Soit $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ une formule qui contient une constante individuelle "a". S'il n'est pas le cas que "a" a une occurrence dans une des prémisses dont dépend la preuve de ϕ, la règle de *'généralisation universelle'* (GU) nous permet d'étendre une preuve de $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ à une preuve de $\ulcorner\forall x(\phi(a/x))\urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner\phi(a)\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\forall x(\phi(a/x))\urcorner$	de (m) avec (GU)

Conversement, la règle de la *'spécialisation existentielle'* (SE) nous permet de prouver, à partir de $\ulcorner\exists x(\phi(a/x))\urcorner$ toute formule ψ que nous pouvons prouver à partir de la supposition $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ – s'il n'est pas le cas que "a" a une occurrence dans ψ ou dans une supposition dont dépend la preuve de ψ à partir de $\ulcorner\phi(a)\urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner\exists x(\phi(a/x))\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\ulcorner\phi(a)\urcorner \quad \vdash^* \ \ulcorner\phi(a)\urcorner$	supposition
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\ulcorner\phi(a)\urcorner \quad \vdash^* \ \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	
p	$\vdash \psi$	de (m), (n) et (o) avec (SE)

La ligne (p) contiendra toutes les prémisses ou suppositions de la ligne (m) et toutes les suppositions nécessaires pour la preuve de ψ de $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ (autres que $\ulcorner\phi(a)\urcorner$).

[3]Nous avons défini cette notion dans la leçon 10. Un terme n'est pas libre pour une variable dans une formule si une éventuelle substitution de la variable par le terme avait comme conséquence qu'une occurrence libre de cette variable dans le terme devenait gouvernée par un quantificateur dans la formule. Dans le cas où le terme en question est une variable, ceci veut dire qu'il serait substitué à l'intérieur d'un quantificateur qui le gouvernera.

3 Quelques exemples

Le premier exemple illustre le bon usage de la règle de spécialisation existentielle (SE). Pour prouver une conclusion à partir d'une quantification existentielle, nous essayons de la dériver de son disjoint typique. Voici une preuve du séquent "$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$". Nous commençons par la supposition du disjoint typique :

1	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash$	$\forall x(Gx \rightarrow Hx)$	prémisse
2	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash$	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^*$	$Fa \wedge Ga$	supposition

Une instanciation de la quantification universelle pour la constante "a" qui représente l'individu arbitraire qui était dit être F et G nous permet alors d'appliquer les règles ordinaires de connecteurs, prouvant que a n'est pas seulement F mais aussi H :

4	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^*$	$Ga \rightarrow Ha$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^*$	Ga	de (3) avec ($\wedge\mathbf{E}$)
6	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^*$	Ha	de (4) et (5) avec (MP)
7	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^*$	Fa	de (3) avec ($\wedge\mathbf{E}$)
8	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^*$	$Fa \wedge Ha$	de (6) et (7) avec ($\wedge\mathbf{I}$)

Pour compléter la preuve de "$\exists x(Fx \wedge Hx)$", il nous reste faire une généralisation existentielle par rapport à l'individu arbitraire et d'appliquer la règle de spécialisation existentielle au résultat :

9	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^*$	$\exists x(Fx \wedge Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash$	$\exists x(Fx \wedge Hx)$	de (2), (3) et (9) avec (SE)

L'application de (SE) est légitime parce que "a" n'a pas d'occurrence dans "$\exists x(Fx \wedge Hx)$" et parce que la preuve de la dernière proposition ne dépendait pas d'autre suppositions sur a que celle que le disjoint typique était vrai.

Prouvons la distributivité du quantificateur universel sur la conjonction, c'est-à-dire le séquent "$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx) \vdash \forall x(Fx \wedge Gx)$". La preuve consiste d'une instanciation des deux conjoints, suivie d'une généralisation de la conjonction des instanciations :

1	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash$	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash$	$\forall x(Fx)$	de (1) avec ($\wedge\mathbf{E}$)
3	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash$	Fa	de (2) avec (SU)
4	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash$	$\forall x(Gx)$	de (1) avec ($\wedge\mathbf{E}$)
5	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash$	Ga	de (2) avec (SU)
6	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash$	$Fa \wedge Ga$	de (3) et (5) avec ($\wedge\mathbf{I}$)
7	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash$	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	de (6) avec (GU)

Dans la preuve précédente, nous n'avons dû faire aucune supposons. Pour prouver la distributivité du quantificateur existentiel sur la disjonction, par contre, nous devons en faire. Prouvons alors le séquent "$\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$" :

1	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$\vdash\ \exists x(Fx \vee Gx)$		prémisse
2	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga$	$\vdash^*\ Fa \vee Ga$	supposition
3	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^*\ Fa$	supposition
4	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^*\ \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (4) avec ($\vee$**I**)
6	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^*\ Ga$	supposition
7	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^*\ \exists x(Gx)$	de (6) avec (GE)
8	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^*\ \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (7) avec ($\vee$**I**)
9	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga$	$\vdash^*\ \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (2, 3, 5, 6, 8) avec ($\vee$**E**)
10	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$\vdash\ \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$		de (1), (2) et (9) avec (SE)

Comme nous l'avons vu dans la discussion des 'règles de passages' dans la leçon neuf, le quantificateur existentiel distribue aussi sur l'antécédent d'une implication qui ne contient pas d'occurrence libre de la variable qu'il quantifie. Nous pouvons donc prouver "$\exists x(Fa \rightarrow Fx) \vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$" :

1	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash\ Fa \rightarrow \exists x(Fx)$		prémisse
2	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	Fa	$\vdash^*\ Fa$	supposition
3	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^*\ Fa \rightarrow Fb$	supposition
4	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^*\ Fb$	de (2) et (3) avec (MP)
5	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	Fa	$\vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (1), (3) et (5) avec (SE)
7	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash\ Fa \rightarrow \exists x(Fx)$		de (2) et (6) avec (PC)

Comme nous avons déjà une occurrence de la constante "a", nous devons choisir, à la ligne (3), la constante "b" pour désigner l'individu arbitraire qui figure dans le disjoint typique de la quantification existentielle.

Nous pouvons aussi prouver un séquent, "$\forall x\forall y(Rxy) \vdash \forall y\forall x(Rxy)$", qui correspond à une observation que nous avons fait auparavant : que les variables, prises individuellement, sont interchangeables – tout ce qui distingue une variable d'une autre sont leurs propriétés relationnelles, en particulier si elles sont liées par des quantificateurs de différentes types :

1	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall x\forall y(Rxy)$	prémisse
2	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall y(Ray)$	de (1) avec (SU)
3	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ Rab$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall x(Rxb)$	de (3) avec (GU)
5	$\forall x\forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall y\forall x(Rxy)$	de (4) avec (GU)

Comme dans la dernière preuve, nous devons choisir deux constantes individuelles différentes, parce qu'autrement nous déduirions le séquent invalide "$\forall x\forall y(Rxy) \vdash \forall x(Rxx)$", ayant perdu toute possibilité de distinguer entre les deux places argumentales.

Finalement, nous prouvons un séquent un peu plus compliqué, à savoir le suivant :

$$\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy)), \forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy)) \vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$$

En abrégeant "$\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy))$" par "**A**" et "$\forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy))$" par "**B**", nous obtenons la preuve suivante :

1	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash\ \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy))$		prémisse
2	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash\ \forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy))$		prémisse
3	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*\ Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	supposition
4	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*\ Fa$	de (3) avec ($\wedge$)
5	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*\ \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	de (3) avec ($\wedge$)
6	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*\ Fa \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Ray)$	de (2) avec (SU)
7	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*\ \forall y(By \rightarrow \neg Ray)$	de (4) et (6) avec (MP)
8	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*\ Gb$	supposition
9	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*\ Gb \rightarrow Rab$	de (5) avec (SU)
10	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*\ Rab$	de (8) et (9) avec (MP)
11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*\ Bb \rightarrow \neg Rab$	de (7) avec (SU)
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*\ \neg\neg Rab$	de (10) avec (DN)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*\ \neg Bb$	de (12) et (11) avec (MT)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*\ Gb \rightarrow \neg Bb$	de (8) et (13) avec (PC)
15	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*\ \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$	de (14) avec (GU)
16	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash\ \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$		de (1), (3) et (15) avec (SE)

Nous commencons, comme d'habitude, par des instantiations des quantifications, ce qui nous permet après d'appliquer les règles pour les connecteurs. En vue d'une application de (PC), nous supposons, à la ligne (8), l'antécédent de l'implication dont nous voulons prouver la quantification universelle. Nous généralisons le résultat obtenu à la ligne (15) et enlevons la supposition du disjoint typique, ce qui est permis parce que la conclusion obtenu n'en dépend pas.

4 Les variables, la référence directe et les individus arbitraires

Une phrase ouverte, nous l'avons dit, est une fonction d'objets et de séquences d'objets à des valeurs de vérité. En tant que fonction, elle est essentiellement incomplète et a besoin d'arguments pour donner une phrase complète qui peut être évaluée pour sa vérité ou fausseté. Nous avons introduit des variables, "x" et "y", pour distinguer les différentes lacunes dans une phrase ouverte, et nous avons dit que les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses, mais vraies ou fausses *de* quelques objets ou de séquences d'objets. Soit $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ une telle séquence, et "$\ldots x_1 \ldots x_2 \ldots x_n \ldots$" une phrase ouverte contenant des occurrences libres de n variables différentes. Dans le cas où nous recevons une phrase vraie en substituant "a_1" pour "x_1", "a_2" pour "x_2" et ainsi de suite, nous disons que la séquence *satisfait* la phrase ouverte – la fonction nous donne la valeur **v** pour cette séquence d'objets. C'est cette notion de satisfaction que nous avons utilisée pour définir "…est vrai sous une assignation de valeurs".

L'utilité des variables vient du fait qu'elles peuvent être liées par des quantificateurs. Le quantificateur existentiel, par exemple, lie la variable "x" dans la phrase suivante :

$$\exists x \text{ (j'adore } x) \tag{2}$$

(2) est une phrase complète qui est vraie si et seulement si j'adore quelque chose.

Un quantificateur ne peut lier que les variables qui se trouvent dans sa portée, c'est-à-dire à l'intérieur de la phrase ouverte qu'il précède. Pour dire que j'adore un philosophe, il faut dire

$$\exists x \text{ (j'adore } x \ \wedge \ x \text{ est un philosophe)} \tag{3}$$

parce que l'expression suivante :

$$\exists x \text{ (j'adore } x) \ \wedge \ x \text{ est un philosophe} \tag{4}$$

est une phrase ouverte qui est vraie d'un objet si et seulement si deux conditions sont satisfaites : que cet objet est un philosophe et que j'adore quelque chose (autre qu'un philosophe, peut-être).

Dans le cas où plusieurs occurrences de la même variable se trouvent dans la portée d'un quantificateur, le quantificateur coordonne leur valeurs : quelque soit l'assignation qui rend vraie la phrase ouverte, c'est une assignation qui assigne le même individu à toutes les occurrences de la même variable. Si, pour donner un exemple, le quantificateur existentiel précédant une phrase ouverte me donne le droit de choisir un objet dont la phrase ouverte est vraie, ce choix doit être tenu constant pour cette phrase ouverte toute entière : je dois garder mon choix pour *toute* la phrase ouverte en question. (3), par exemple, dit qu'il y a un seul objet qui est adoré par moi et, en même temps, un philosophe. Pour avoir droit à deux choix indépendants, j'ai besoin de mettre deux quantificateurs :

$$\exists x \text{ (j'adore } x) \ \wedge \ \exists x \ (x \text{ est un philosophe}) \tag{5}$$

(5) fait une assertion beaucoup plus faible que la fait (3) – à savoir que j'adore quelqu'un et qu'il y a au moins un philosophe. Les deux occurrences de la variable "x" dans (5) sont indépendantes – nous aurions aussi pu écrire :

$$\exists x \text{ (j'adore } x) \ \wedge \ \exists y \ (y \text{ est un philosophe}) \tag{6}$$

D'un point de vue logique, il n'y a aucune différence entre (5) et (6). Dans (3), de l'autre côté, les deux occurrences des variables sont liées – si on voulait substituer "y" pour "x", on obtiendrait

$$\exists y \text{ (j'adore } y \ \wedge \ y \text{ est un philosophe)} \tag{7}$$

Comme (6) et (5), (7) et (3) ne diffèrent pas du point de vue logique. Les variables ne servent qu'à indiquer les lacunes dans les phrases ouvertes et de lier ces lacunes par des quantificateurs – elles n'ont aucune valeur sémantique indépendante. La seule chose qui distingue les différentes variables sont leurs propriétés relationnelles : la phrase ouverte "x aime x", par exemple, est vraie de toutes les choses qui s'aiment elles-mêmes – la phrase "x aime y" est aussi vraie de ces choses (puisque nous pouvons assigner "x" et "y" au même individu), mais elle est également vraie de toutes les paires dont le premier membre aime le second.[4]

C'est parce que plusieurs occurrences libres de la même variable prennent leurs valeurs d'une manière coordonnée que nous pouvons traiter, par les moyens de la logique des prédicats, d'autres cas d'ambiguïté qui ne peuvent pas être enlevés à l'aide des ressources de la syllogistique. Considérons la phrase suivante :

Marc a travaillé pour un homme qui a tué le deuxième mari
de la soeur jumelle de Marc. (8)

Analysée à l'aide de la syllogistique, le terme général qui est, dans (8), prédiqué de Marc est "...ancien employé de l'assassin du deuxième mari de sa propre soeur jumelle". Le problème avec ce terme, cependant, est qu'il donne facilement lieu à des raisonnements fallacieux : le fait, par exemple, qu'il s'applique également à deux individus, Marc est Marie, n'entraîne pas que Marc et Marie ont travaillé chez la même personne, ni qu'ils sont eux-mêmes des jumeaux. La raison pour ceci est, bien sûr, la reflexivité de "propre" dans "sa propre soeur jumelle". Nous trouvons la même ambiguïté dans la clause relative qu'exprime également ce qui, dans (8), est prédiqué de

[4]Comme nous l'avons remarqué à plusieur reprises, l'ordre des variables peut devenir crucial. Si "Rxy" représente "x est un parent de y", "$\forall x \exists y (Rxy)$" devient "tout le monde a un parent", ce qui est vrai. "$\forall y \exists x (Rxy)$", par contre, veut dire que tout le monde est un parent, ce qui est faux.

Marc :

qui a travaillé pour un homme qui a tué le deuxième mari de sa soeur jumelle (9)

L'ambiguïté dans (9) réside dans le fait que le pronom possessif "sa" se peut référer aux deux occurrences du pronom rélatif "qui", avec une préférence pour le deuxième qui lui est plus proche. L'usage des variables à la place des pronoms résoud ces problèmes :

...est un x tel que x a travaillé pour un homme qui a tué
le deuxième mari de la soeur jumelle de x (10)

Nous avons donc trouvé des analogues des occurrences libres de variables dans le language ordinaire : les pronoms dont aucun antécédent à été exprimé ou implicitement présupposé.

Références

Kit Fine, 1985, *Reasoning with Arbitrary Objects*, nombre 3 dans Aristotelian Society Series, Oxford, England : Basil Blackwell Publishers.

Jaakko Hintikka, 1962, *Knowledge and Belief*, Ithaca, New York : Cornell University Press.

E.J. Lemmon, 1965, "Review of Hintikka (1962)", *The Philosophical Review* 74, pp. 381–384.