

# Deuxième leçon

Cours d'introduction à la logique et la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Philipp Keller

A lire pour le cours du 11 novembre 2003

## 1 Les connecteurs propositionnels

On a vu qu'un argument est une inférence s'il est convaincant (s'il l'est) en vertu des significations de quelques mots qu'il contient et qu'un argument est formel (et une inférence logique) si ces mots sont des 'mots logiques'.

Les différents systèmes de logique diffèrent en ce qu'ils considèrent 'mots logiques'. La logique standard propositionnelle ne considère que les connecteurs propositionnels (des connecteurs qui relient des phrases entières) comme "... et —", "... ou —", "il n'est pas le cas que ...", "si ... alors —" et "... ssi —" (= "si et seulement si"). La logique standard des prédicats considère en plus des quantificateurs ("pour tous ... —", "il y a au moins un ... tel que —"), des relations (par ex. "... est identique à —") et des fonctions (par ex. "la mère de ..."). La logique des prédicats est appelée ainsi parce qu'elle permet le traitement logique des expressions sub-sententielles (plus petites que des phrases entières, par ex. les termes singuliers (noms) et les prédicats).

Le calcul des propositions (la logique propositionnelle) étudie comment la vérité (et la fausseté) d'une proposition complexe est fonction de la vérité (ou la fausseté) des propositions élémentaires dernières qui la composent. Dans des langues naturelles, où la forme grammaticale ne coïncide pas toujours avec la forme logique, cette dépendance du complexe des constituants simples n'est pas toujours apparente. C'est pourquoi la logique ne traite pas directement du langage ordinaire, mais s'occupe d'un langage artificiel et simplifié qui est déterminé par des définitions explicites. On a introduit un langage  $\mathcal{L}$ , qui sera notre langage de la logique propositionnelle, et dont les symboles primitifs sont les suivants :

- A1 des propositions atomiques " $p$ ", " $q$ ", " $r$ ", " $s$ ", " $t$ " etc.
- A2 des constantes logiques " $\wedge$ " (parfois :  $\&$ ) ("et"), " $\vee$ " ("ou"), " $\neg$ " (parfois  $\sim$ ) ("il n'est pas le cas que") et " $\rightarrow$ " (parfois : " $\supset$ ") ("si ... alors ...")
- A3 des parenthèses "(" et ")"

On a aussi donné une définition récursive de ce qu'est une formule bien formée de  $\mathcal{L}$  :

- B1 Toute proposition atomique est une formule bien formée.
- B2 Si " $p$ " et " $q$ " sont des formules bien formées, alors " $(\neg p)$ ", " $(p \wedge q)$ ", " $(p \vee q)$ ", " $(p \rightarrow q)$ " et " $(p \leftrightarrow q)$ " sont des formules bien formées.
- B3 Il n'y a pas d'autres formules bien formées.

On voit que les connecteurs propositionnels binaires prennent deux phrases pour en faire une troisième, plus complexe. Le seul connecteur unaire que nous étudierons, la négation, prend une seule phrase pour en faire une deuxième, plus complexe.

Ces deux définitions, du vocabulaire primitif et des règles pour construire de ce vocabulaire primitive des expressions plus complexes, déterminent la *syntaxe* de notre langue  $\mathcal{L}$ .

En syntaxe, on peut définir ce que l'on appelle le *connecteur principal* d'une proposition, c'est-à-dire le connecteur le moins imbriqué dans les parenthèses, celui qui 'vient en premier' mais que l'on 'calcule en dernier'. L'arithmétique nous fournit ici une analogie utile. Dans l'expression " $((2 + 3) \cdot 4) - 5$ ", le connecteur principal est la soustraction, et c'est celui que l'on considère en dernier :

$$\begin{aligned} & ((2 + 3) \cdot 4) - 5 \\ & \quad (5) \cdot 4 - 5 \\ & \quad \quad (20) - 5 \\ & \qquad \qquad = 15 \end{aligned}$$

De même, dans l'expression " $(p \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow s$ ", le connecteur principal est " $\leftrightarrow$ ", dans " $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ " c'est le premier " $\neg$ " et dans " $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ " le troisième " $\rightarrow$ ". Quel connecteur est le principal d'une proposition dépend donc essentiellement des parenthèses qui sont utilisées pour l'exprimer. Les parenthèses nous servent à indiquer la portée des opérateurs. Pour dire qu'une négation ni l'ensemble d'une conjonction, par exemple, on l'a met en devant de cette conjonction entourée de parenthèses : " $\neg(p \wedge q)$ ". On remarque la différence entre cette proposition et celle où seulement le premier conjoint est nié : " $\neg p \wedge q$ ". On principe, on aurait dû mettre " $(\neg p) \wedge q$ ", mais on adoptera la convention que " $\neg$ " relie 'plus fortement' que " $\wedge$ " : ce qui signifie que " $\wedge$ " relie des propositions avec leurs éventuelles négations.

En déterminant que " $\wedge$ ", par exemple, est un connecteur qui relie deux formules bien formées pour en faire une nouvelle formule bien formée, on n'a encore rien spécifié sur la *signification* de ce connecteur. D'après tout ce que nous en savons ('officiellement'<sup>1</sup>), ce connecteur pourrait signifier la même chose que "il est le cas en Australie que ... mais ici il est le cas que —", "Sam a dit que ... mais il me semble plutôt que —", "... et je suis malade si et seulement si —". Mais comment donner une signification précise à ces connecteurs ?

C'est ici qu'on commence à faire de la *sémantique*. Faire la sémantique d'une expression, c'est lui attribuer une signification particulière. Dans les langages naturels, il y a beaucoup de facteurs qui contribuent à la signification d'un mot, et le même mot peut avoir plusieurs significations (un cas d'ambiguïté) ou varier de signification selon le contexte de son utilisation (un cas d'indexicalité). Dans des langues formelles, qui ne sont pas parlées et sont artificiellement construites, la signification des mots est beaucoup plus facile à déterminer : la signification d'une phrase coïncide avec ses *conditions de vérité*; et ce sont ces conditions de vérité qu'on a appelé la *proposition* exprimée par une phrase dans un certain contexte d'énonciation. Dire que la proposition exprimée par une phrase est vraie (et donc que la phrase, telle qu'elle est utilisée dans ce contexte, est elle-même vraie), c'est dire que ses conditions de vérité sont satisfaites. Connaître la signification d'une phrase (savoir quelle proposition elle exprime), c'est pouvoir déterminer, d'une situation possible, si la phrase décrit correctement cette situation ou non (si elle est vraie ou fausse par rapport à cette situation). Les conditions de vérité, en d'autres mots, sont des conditions que le monde doit satisfaire pour rendre vraie la phrase en question.<sup>2</sup>

Mais il reste toujours une distinction importante à faire, à savoir celle entre des logiques extensionnelles et les logiques intensionnelles. La logique propositionnelle et la logique des prédicats sont des logiques extensionnelles, bien que la logique modale, la logique épistémique et beaucoup

<sup>1</sup>Je dis 'officiellement' parce que j'ai déjà introduit des significations 'informelles' entre parenthèses. Ceci était pour rendre possible la lecture des formules – mais rien ne détermine qu'avec "et" j'ai voulu parler de la conjonction : j'aurais pu parler d'un connecteur bizarre comme "est vrai selon Sam mais Maria affirme que".

<sup>2</sup>Dans des cas d'indexicalité, les conditions de vérité varient avec le contexte de l'énonciation. La condition de vérité de la phrase "J'ai faim maintenant" est que Philipp a faim le 4 novembre, à 11 h : la phrase est vraie (exprime une proposition vraie) si et seulement si Philipp a faim le 4 novembre, à 11 h.

d'autres logiques sont des logiques intensionnelles. Comparons les arguments suivants :

**C1** Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage. J'étudie la logique. Donc je serai heureux et sage.

**C2** Tous les hommes sont mortels. Socrate est un homme. Donc Socrate est mortel.

**C3** Il est nécessaire que 9 soit la somme de 5 et 4. 9 est la somme de 3 et 6. Donc il est nécessaire que la somme de 3 et 6 soit la somme de 5 et 4.

**C4** Je sais tout ce que Robert a dit. Tout ce que Robert a dit est qu'il est fatigué et en a marre. Donc je sais que Robert est fatigué et en a marre.

Dans des contextes respectifs, tous ces quatre arguments sont convaincants. Les deux premiers sont aussi valides dans la logique propositionnelle et la logique des prédicats respectivement. Ceci veut dire que si leurs prémisses sont vraies, alors leurs conclusions le sont aussi. On a dit que la validité de ces inférences ne dépend que de leur forme et que toutes les inférences ayant la même forme sont également valides. La première inférence, par exemple, est conforme au schéma valide suivant :

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{q} \quad (\text{modus ponendo ponens})$$

Pour arriver à ce schéma à partir d'une inférence particulière comme (C1), il faut faire abstraction de toutes les particularités des phrases et ne les considérer que par rapport à leur capacité d'être vraies ou fausses. Pour savoir si ou non je peux conclure que je serai heureux et sage du fait que je fasse de la logique et du fait que si je fais de la logique, alors je serai heureux et sage, il ne me faut savoir que si ces deux prémisses sont vraies : si elles sont vraies, alors je serai heureux et sage. Je pourrais conclure mon bonheur et ma sagesse d'une infinité d'autres prémisses, si seulement elles étaient également vraies :

**C1a** Si je n'étudie pas la logique, je serai heureux et sage. Je n'étudie pas la logique. Donc je serai heureux et sage.

**C1b** Si je vais à la maison maintenant, je serai heureux et sage. Je vais à la maison maintenant. Donc je serai heureux et sage.

C'est pourquoi la logique propositionnelle standard est une logique extensionnelle : la validité de ses inférences ne dépend que de la vérité (= l'extension) des propositions qu'elles contiennent.

Contrastons ce cas avec (C3). Si ou non je peux inférer la (vérité de la) conclusion de (la vérité de) ses prémisses ne dépend non seulement de la vérité de ces prémisses : il importe également si ou non la deuxième prémisses est nécessaire. Ceci devient apparent si on remplace la deuxième prémisses avec une autre qui a la même valeur de vérité, c'est-à-dire est également vraie :

**C3a** Il est nécessaire que 9 soit la somme de 5 et 4. 9 est le nombre des planètes. Donc il est nécessaire que le nombre des planètes soit la somme de 4 et 5.

**C3b** Il est nécessaire que 9 soit la somme de 5 et 4. 9 est mon nombre préféré. Donc il est nécessaire que mon nombre préféré soit la somme de 4 et 5.

Même si leurs prémisses sont vraies, la conclusion de ces deux arguments est fausse. On voit donc que la validité d'une inférence en logique modale ne dépend non seulement de la vérité des propositions concernées, mais également de leurs intensions, en particulier de la question à savoir si elles sont nécessaires ou non.<sup>3</sup>

La distinction entre logiques extensionnelles et logiques intensionnelles repose sur celle entre extension et intension, une distinction technique de la philosophie du langage qui s'applique à toutes les expressions.<sup>4</sup> Ne considérant que des expressions qui sont des phrases (et dont l'extension est donc la valeur de vérité), on obtient un cas spécial de l'extensionnalité : le principe de

<sup>3</sup>La même chose vaut pour la logique épistémique : pour que la conclusion de (C4) s'ensuive de ses prémisses, il faut que je *sache* que tout ce que Robert a dit est qu'il est fatigué et en a marre.

<sup>4</sup>La distinction entre "intension" et "extension" a été faite par Carnap (1947) qui voulait ainsi préciser une distinction faite par Gottlob Frege (1892b) entre le sens ("Sinn", "sense") et la référence (ou dénotation, "Bedeutung").

*vérifonctionnalité*, qui dit que la valeur de vérité d'une proposition complexe ne dépend que des valeurs de vérité de ses propositions constituantes et des connecteurs logiques qui les relient. Le principe de vérifonctionnalité est donc aussi un cas particulier du principe de la compositionnalité.

La vérifonctionnalité des connecteurs propositionnels signifie qu'on détermine la signification d'une proposition complexe qui les contient en déterminant sa valeur de vérité pour toutes les manières possibles d'attribuer des valeurs de vérité à ses constituants. On appelle une telle manière possible d'attribuer des valeurs de vérité aux constituants une *interprétation* de la proposition complexe. Une interprétation de la proposition complexe "Si Jean est malade, alors Maria est sage et heureuse et Pierre a eu raison", par exemple, consiste en l'attribution de **v** (vrai) à "Jean est malade" et à "Pierre a eu raison" et de **f** (faux) à "Maria est sage et heureuse". Cette attribution des valeurs de vérité aux constituants simples nous oblige, logiquement, d'attribuer **f** à la conjonction "Maria est sage et heureuse et Pierre a eu raison" (puisque une conjonction ne peut pas être vraie si un des conjoints est faux) et elle nous oblige aussi d'attribuer la valeur **f** à l'implication toute entière, puisque son antécédent est vrai et son conséquent faux. C'est la logique propositionnelle qui détermine ces obligations, en nous montrant comment la valeur de vérité de la proposition complexe dépend de l'interprétation choisie.

C'est par une *table de vérité* qu'on montre comment la valeur de vérité de la proposition complexe est une fonction de la valeur de vérité de ses constituants. On dit, par exemple, ce qu'on entend par le connecteur unaire " $\neg$ ", en disant que " $\neg p$ " est vraie si " $p$ " est fausse et que " $\neg p$ " est fausse si " $p$ " est vraie. On détermine la signification de " $\wedge$ " en disant que " $p \wedge q$ " est vraie si " $p$ " et " $q$ " sont les deux vraies et fausse autrement. Mais considérons ces connecteurs plus en détail.

## 2 La négation

Dans les langues naturelles, il y a beaucoup de manières de nier une phrase telle que "j'aurais pu l'aider" :

**N1** Il n'est pas le cas que j'aurais pu l'aider.

**N2** Il était impossible pour moi de l'aider.

**N3** Je n'aurais pas pu l'aider.

**N4** L'aider m'était impossible.

**N5** Aurais-tu pu l'aider? Non.

**N6** Il est faux que j'aurais pu l'aider.

Ce que toutes ces manières de nier "j'aurais pu l'aider" ont en commun, et la raison pour laquelle toutes ces phrases sont formalisées par " $\neg p$ " est qu'elles sont vraies si et seulement si il est faux que j'aurais pu l'aider. L'essence de la négation est donc qu'elle inverse la valeur de vérité de

tung", "reference") d'un terme singulier (un mot qui ne désigne au plus une chose). Selon Frege, un terme singulier comme "le président des États-Unis" a comme référence un individu spécifique, c'est-à-dire George W. Bush dans notre cas, et comme sens une condition que cet individu doit remplir pour être le référent du terme, c'est-à-dire être le président des États-Unis. La différence pour les prédicats ("termes généraux") et les phrases est déjà plus controversée. Dans la théorie originale de Frege, la référence d'un prédicat comme "...est bleu" était le concept ("Begriff") *bleu*, et la référence d'une phrase était sa valeur de vérité (le sens d'une phrase était identifié la pensée qu'elle exprime). Carnap remplaçait cette distinction avec la suivante :

	extension	intension
terme singulier "Fred"	le référent Fred, l'homme	un critère d'identification <i>le père de Nathalie, frère de Gerhard etc.</i>
prédicat "bleu"	l'ensemble toutes les choses bleues	le concept fonction qui détermine quels objets, dans une situation considérée, sont les choses bleues
phrase " $p$ "	la valeur de vérité <b>v</b> ou <b>f</b>	la proposition fonction qui détermine si, dans une situation considérée, " $p$ " est vrai

la proposition à laquelle elle est attachée : si celle-là est vraie, sa négation est fausse ; si elle est fausse, sa négation est vraie. Nous pouvons donc définir la signification de “ $\neg$ ” par la table de vérité suivante :

$$\begin{array}{c|c} p & \neg p \\ \hline V & F \\ \hline F & V \end{array}$$

Ce tableau détermine la valeur de vérité de “ $\neg p$ ” pour toutes les ‘possibilités logiques’ concernant la valeur de vérité de “ $p$ ”. Comme, dans une logique qui obéit au principe de bivalence (comme les logiques standards propositionnelles et des prédicats), toute proposition est ou bien vraie ou bien fausse, il n’y en a que deux : “ $V$ ” (“vrai”) et “ $F$ ” (“faux”).<sup>5</sup> Chacune de ses possibilités logiques correspond à une *interprétation* de la phrase “ $p$ ” – selon une, elle est vraie (et “ $\neg p$ ” est donc fausse), selon l’autre, elle est fausse (et “ $\neg p$ ” est donc vraie). Une interprétation est l’attribution d’une valeur de vérité (de “ $V$ ” ou de “ $F$ ”) à une proposition. Pour donner la sémantique de “ $\neg$ ”, il faut spécifier comment la valeur de vérité d’une proposition complexe qui contient “ $\neg$ ” dépend des valeurs de vérité de ces constituants – c’est ce que fait notre table de vérité. C’est pourquoi la table de vérité ci-dessus nous détermine (complètement) la signification de “ $\neg$ ”.

On peut distinguer la négation interne de la négation externe. La négation externe, qui correspond à notre connecteur “ $\neg$ ”, est un opérateur : elle prend une phrase pour en faire une autre phrase (la négation de la première). La négation interne, au contraire, prend un prédicat et en fait un autre, qui, au moins dans les cas paradigmatiques, s’applique à un objet si et seulement si le premier ne s’applique pas à cet objet. Dans les langages naturels, ces différents types de négation nous donnent souvent des phrases dont il n’est pas toujours clair si la signification est la même. Considérons

1. Il n’est pas le cas que la solution de cette équation est plus grande que 2.
2. La solution de cette équation n’est pas plus grande que 2.

La deuxième phrase, surtout si elle est interprétée comme synonyme avec “la solution de cette équation est égale ou plus petite que 2” présuppose que cette équation ait une solution, ce que la première phrase ne fait pas. Si la deuxième est prise comme synonyme avec “la solution de cette équation est 1 ou 2”, elle présuppose même que la solution est un nombre naturel.<sup>6</sup> Ces présuppositions peuvent échouer et c’est pour cela que la négation interne dans les langues naturelles n’exhibe pas ce que nous avons identifié comme l’essence de la négation (en logique) : elle n’est pas toujours vraie si la proposition positive qu’elle modifie est fausse.

Suivant Frege, nous adopterons donc pour la suite la thèse selon laquelle toute proposition qui n’est pas vraie est fausse et toute proposition qui n’est pas fausse est vraie.<sup>7</sup> Ceci s’ensuit de notre acceptation des trois principes suivantes :

1. Le *principe de non-contradiction* dit que, pour toute proposition “ $p$ ”, il n’est pas possible que “ $p$ ” et “ $\neg p$ ” soient vraies ensemble. Si “ $p$ ” est vraie, alors “ $\neg p$ ” ne l’est pas ; si “ $\neg p$ ” est vraie, alors “ $p$ ” ne l’est pas.

<sup>5</sup>C’est une question intéressante ce que sont les valeurs de vérité. Gottlob Frege les a pris pour des objets (‘logiques’). Lorsque j’utilise “ $V$ ” et “ $F$ ” dans les tables de vérité, je ne veux pas parler d’objets, mais seulement spécifier la possibilité logique en question (comme possibilité qui est telle que si elle était actuelle, alors la proposition en question serait vraie ou fausse). Lorsque je parle des valeurs de vérité comme je parlerais des objets, j’utilise “ $v$ ” et “ $f$ ”.

<sup>6</sup>Cette distinction a motivée Russell dans son analyse des descriptions définies comme “le roi de la France”. Observons que et une réponse affirmative et une réponse négative à la question à savoir si le roi de la France est chauve nous semble obliger à l’affirmation qu’il y a un roi de la France, Russell (1905) a argumenté que la négation externe de “le roi de la France est chauve” est “il n’est pas le cas qu’il y a exactement un individu qui est le roi de la France et qui est chauve”.

<sup>7</sup>Par rapport à des langues naturelles, cette présupposition est très douteuse. A part des propositions qui commentent des ‘erreurs de catégorie’ comme “Le nombre 2 est célibataire”, celles-ci contiennent aussi des phrases qui ont des présuppositions qui peuvent ne pas être satisfaites, comme “Le roi de la France est chauve” présuppose qu’il y ait un roi de la France qui est ou bien chauve ou bien chevelu.

2. Le *principe du tiers-exclu* dit qu’ou bien “ $p$ ” ou bien “ $\neg p$ ” est vraie – que “ $p \vee \neg p$ ” (“ou bien  $p$  ou bien  $\neg p$ ”) est une vérité logique.
3. Le *principe de bivalence*, finalement, dit que ou bien “ $p$ ” est vraie ou bien “ $p$ ” est fausse (il n’y a pas de troisième ‘valeur de vérité’ comme ‘indéterminé’, ‘vrai et faux’, ‘inconnu’ etc.).<sup>8</sup>

Il n’y a que très peu de philosophes qui nient le principe de non-contradiction, c’est-à-dire qui pensent que “ $p$ ” et “ $\neg p$ ” peuvent les deux être vraies ensemble – on les appelle les ‘dialétheistes’ et le logicien Graham Priest en est un exemple (Priest 1993: cf.). Il y a beaucoup plus de philosophes qui nient le principe du tiers-exclu, c’est-à-dire qui maintiennent que “ $p \vee \neg p$ ” n’est pas une vérité logique. Les intuitionnistes, par exemple, interprètent l’affirmation qu’on a prouvé “ $p \vee \neg p$ ” comme une affirmation qu’on a ou bien prouvé que  $p$  ou bien on a prouvé que  $\neg p$  (Dummett 2000: cf.). Dans beaucoup de cas, ni l’un ni l’autre est possible (prenons par exemple “ou bien il pleut demain ou bien il ne pleut pas demain” – comment pourrais-je *prouver* la présence ou l’absence de la pluie future?). Ceux qui nient le principe de bivalence, finalement, sont ceux qui préfèrent une logique à plusieurs valeurs de vérité, par exemple une logique qui accorde aux propositions dont on ne sait pas si elles sont vraies ou fausses la valeur de vérité ‘inconnu’. Donnée que la contribution de “ $\neg$ ” aux conditions de vérité d’une proposition complexe qui le contient comme connecteur principal est l’inversement des valeurs de vérité (de “ $V$ ” en “ $F$ ” et vice versa), un autre caractéristique de la négation est la loi de la double négation :

$$\frac{\neg\neg p}{p} \quad \neg\mathbf{E} \tag{1}$$

La validité de ce schéma d’inférence signifie qu’on peut inférer “ $p$ ” de la phrase doublement niée “ $\neg\neg p$ ” : elle nous donne le droit d’‘éliminer’ la double négation (dont le nom “ $\neg\mathbf{E}$ ” pour **E**limination de la (double) négation).<sup>9</sup>

La négation est particulièrement importante pour les preuves par réduction à l’absurde (*reductio ad absurdum*). L’idée d’une telle preuve est la suivante : on suppose qu’une proposition particulière est vraie (même si on croit peut-être qu’elle est fausse). On montre que, sous cette supposition, il s’ensuit quelque chose d’absurde (quelque proposition dont on *sait* qu’elle est fausse). On conclut, finalement, que la supposition initiale était fausse – si elle était vraie, quelque chose dont on sait qu’elle est fausse serait vraie, alors elle est fausse. Si on abrège par “ $\perp$ ” n’importe quelle proposition dont on sait qu’elle est fausse (“ $\perp$ ” représente donc ‘l’absurde’), on peut formuler cette règle comme suit :

$$\frac{p \rightarrow \perp}{\neg p} \quad \neg\mathbf{I}^* \tag{2}$$

On reviendra sur ce schéma d’inférences plus tard.

L’élimination de la double négation s’ensuit des principes de non-contradiction et du tiers-exclu. La loi de non-contradiction dit qu’il n’est pas possible que “ $p$ ” et “ $\neg p$ ” soient toutes les deux vraies. Si alors “ $\neg\neg p$ ” est vraie, alors “ $\neg p$ ” ne l’est pas. Par le principe du tiers exclu, si “ $\neg p$ ” n’est

<sup>8</sup>Graphiquement, ces trois principes peuvent être interprétés comme suivant. Imaginons une partition de l’‘espace logique’ des valeurs de vérité des propositions. Le principe de bivalence dit alors qu’il ne faut considérer que deux possibilités – qu’une proposition soit vraie ou qu’elle soit fausse :

vrai	faux
------	------

Le principe du tiers-exclu (= que “ $p \vee \neg p$ ” est une vérité logique) dit qu’il faut placer ou bien “ $p$ ” ou bien “ $\neg p$ ” dans la colonne gauche. Le principe de non-contradiction dit qu’on doit placer une de ces deux dans la colonne à gauche. Le principe de bivalence, finalement, dit que tout ce qu’on ne place pas à gauche doit être placé à droite (que la distinction entre les propositions vraies et fausses est une distinction exhaustive).

<sup>9</sup>En acceptant que la règle de l’élimination de la double négation est valide, nous faisons un autre pas qui nous éloigne des langues naturelles. Dans beaucoup de contextes, il y a une différence entre “Je suis d’accord” et “Il n’est pas le cas que je suis en désaccord”.

pas vraie, alors “ $p$ ” est vraie. Donc : si “ $\neg\neg p$ ” est vraie, alors “ $p$ ” l’est aussi.

### 3 La conjonction

Considérons les phrases suivantes :

**C1** Ils se sont mariés et avaient un enfant.

**C2** Ils avaient un enfant et se sont mariés.

**C3** Pierre et Paul étudient la logique, mais ils sont heureux et sages.

**C4** Elle est allée voter, bien que sa mère lui disait de rester à la maison.

**C5** Je suis heureux et sage.

**C6** Je suis heureux, mais sage.

Qu’est-ce qui nous permet de dire qu’il s’agit des phrases conjonctives, même si, par exemple “Je suis heureux parce que je suis sage” et “Je suis heureux ou sage” ne le sont pas ? L’important semble être que la vérité d’une phrase conjonctive entraîne la vérité de ses deux conjoints et que la vérité de ses deux conjoints entraîne la vérité de la phrase conjonctive.<sup>10</sup> On peut donc dire que l’essence de la conjonction, “ $\wedge$ ”, est qu’elle rend valide les inférences suivantes :

$$\frac{p, q}{p \wedge q} \wedge \mathbf{I} \qquad \frac{p \wedge q}{p} \wedge \mathbf{E} \qquad \frac{p \wedge q}{q} \wedge \mathbf{E} \qquad (3)$$

Il s’agit des règles d’introduction (“ $\wedge \mathbf{I}$ ”) et d’élimination (“ $\wedge \mathbf{E}$ ”) de notre connecteur “ $\wedge$ ” : on peut inférer une conjonction de ses deux conjoints et on peut inférer les conjoints de la conjonction.

Si on considère que le ‘comportement inférentiel’ (et donc, dans une logique extensionnelle, la signification) du connecteur “et” est déterminé par  $\wedge \mathbf{I}$  et  $\wedge \mathbf{E}$  et si on formalise les phrases (C1) à (C6) par “ $\wedge$ ”, on perd beaucoup de nuances de significations que ces phrases ont dans la langue naturelle. On ne fait pas, par exemple, une distinction entre “et” et “mais” (et donc pas de distinction entre (C5) et (C6)). Frege, en argumentant pour une logique extensionnelle, disait que cette différence n’appartient pas au domaine de la signification au sens restreint du mot, mais au domaine de ce qu’il appelle le ‘ton’ d’une phrase. La signification d’une expression, au sens restreint, est ce qui est préservé par une bonne traduction. Les différences entre “et” et “mais”, cependant, sont des différences de tonalité, parce qu’ils peuvent se perdre même dans une bonne traduction.<sup>11</sup>

Nos exemples nous montrent aussi qu’il faut parfois reformuler une phrase pour rendre évident sa structure logique : (C3), par exemple, devient la phrase barbare : “Pierre étudie la logique et Paul étudie la logique et Pierre est heureux et Paul est heureux et Pierre est sage et Paul est sage”. Par rapport à des phrases de la langue naturelle, cette transformation n’est pas toujours évidente.<sup>12</sup> C’est aussi pour cela qu’on travaillera avec une langue formelle.

La conjonction, comme elle est formalisée par “ $\wedge$ ”, est commutative : ceci veut dire que “ $p \wedge q$ ” et “ $q \wedge p$ ” sont équivalentes – il n’y a pas de raisons logiques de les distinguer. Ce qui distingue

<sup>10</sup>Ceci n’est pas le cas pour “Je suis heureux parce que je suis sage” : il est très bien possible que je sois heureux et sage sans être heureux parce que je suis sage. De l’autre côté, on ne peut pas inférer du fait que je suis heureux ou sage que et le bonheur et la sagesse me caractérisent.

<sup>11</sup>En général, le ‘ton’ sert à manifester l’attitude de celui qui utilise une phrase par rapport à ce qu’il dit. En utilisant “mais” au lieu de “et”, par exemple, je peux rendre visible que je pense qu’il y ait un contraste entre les deux propositions. En utilisant “carcan” au lieu de “cheval”, je peux exprimer une attitude négative etc.

<sup>12</sup>Comparons par exemple “Marie et Simone ne sont pas contentes de leurs maris.” Le sens de la phrase, mais pas forcément sa forme, nous oblige de transformer cette phrase en “Marie n’est pas contente de son mari et Simone n’est pas contente de son mari”, même si, par exemple “Marie et Simone ne sont pas contentes des élections” donne “Marie n’est pas contente des élections et Simone n’est pas contente des élections.” Un autre problème concerne la conjonction ‘collective’ comme dans “Pierre et Paul ont soulevé le piano”. Ceci peut être vrai sans que “Pierre a soulevé le piano” et “Paul a soulevé le piano” soient vraies. Il ne s’agit donc pas d’une conjonction au sens logique.

“Ils se sont mariés et avaient un enfant” (C1) et “Ils avaient un enfant et se sont mariés”(C2) ne concerne donc pas la logique. La logique extensionnelle ne concerne que la manière dont la valeur de vérité d’une proposition de la forme “ $p \wedge q$ ” dépend des valeurs de vérité de “ $p$ ” et de “ $q$ ”. La signification de “ $\wedge$ ” est donc déterminée par la table de vérité suivante :

$p$	$q$	$p \wedge q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

On voit que “ $p \wedge q$ ” n’est vraie que si les deux propositions “ $p$ ” et “ $q$ ” sont vraies – si au moins une est fausse, “ $p \wedge q$ ” l’est aussi.

## 4 La disjonction

Considérons les assertions suivantes :

**D1** Il pleut ou il ne pleut pas.

**D2** [Qu’est-ce que tu veux dans la vie ?] Me marier, être heureux ou gagner un million.

**D3** [Qui prendras-tu dans ta voiture ?] Jean-Pierre ou Paul.

**D4** [Qui gagneras à la loterie ?] Je vais gagner ou tu vas gagner.

**D5** [A quelle heure arrive-t-elle ?] A six ou à sept heures.

**D6** Tu es ou seras heureux ou sage.

Ce que toutes ces phrases ont en commun, c’est qu’elles sont vraies si un de leurs disjoints est vrai. Il suffit qu’il ne pleuve pas pour que (D1) soit vraie, que je me marie pour avoir réussi dans ma vie (D2), prendre Paul ou arriver à six heures pour tenir mes promesses (D3 et D5), que tu gagnes ou tu seras sage pour (D4 et D6). Comme auparavant, il faut parfois élargir les phrases pour rendre explicite leurs formes logiques : (D6), par exemple, devient : “tu es heureux ou tu seras heureux ou tu es sage ou tu seras sage”.

Il faut aussi distinguer la disjonction inclusive de la disjonction exclusive. Une disjonction inclusive est vraie si et seulement si *au moins un* des disjoints est vrai, y compris lorsque les deux propositions disjointes sont vraies. C’est l’interprétation naturelle des phrases (D2) et (D4) : il serait absurde de dire que si tous mes vœux se réalisent ou si nous gagnons les deux à la loterie, alors les réponses aux questions (D2) et (D4) sont fausses. C’est la disjonction inclusive qui est formalisée par “ $\vee$ ” (ce que vient du latin “vel”). Une disjonction exclusive (“aut” en latin) est vraie si et seulement si un des disjoints, mais pas les deux, sont vrais. C’est l’interprétation naturelle de (D3) (donné que je n’ai qu’une seule place libre dans ma voiture) et de (D5) (donné qu’elle n’arrive qu’une seule fois). Dans certains cas, l’interprétation exclusive est la seule possible, comme dans “boire ou conduire”. L’incompatibilité des disjoints dans un cas de disjonction exclusive vraie peut avoir différentes raisons. Même dans le cas où ces raisons sont des raisons logiques, comme dans (D1), nous ne sommes cependant pas obligés de formaliser une disjonction comme disjonction exclusive. Quand il le faut, nous pouvons toujours rajouter “et non pas les deux” à une disjonction inclusive.<sup>13</sup>

L’essence de la disjonction (inclusive) est donc qu’une proposition disjonctive est vraie si et seulement si au moins un de ces disjoints est vrai. La signification du connecteur “ $\vee$ ” est donc déterminée par la table de vérité suivante :

<sup>13</sup>De même, on peut rajouter “ou les deux” pour rendre explicite qu’il s’agit d’une disjonction inclusive, ce qui peut avoir des effets rhétoriques : “Interrogé sur les auteurs [des] attaques [récentes], George W. Bush a estimé “qu’ils sont soit, ou à la fois, et probablement les deux, des baassistes ou des terroristes étrangers”, faisant allusion aux membres du parti du dirigeant déchu Saddam Hussein. “Ils veulent tuer et créer le chaos”, a-t-il souligné, ajoutant que les terroristes “veulent nous voir partir, mais nous ne partons pas.” (*Le Monde*, 29 octobre 2003) – même s’il nous semble difficile d’imaginer quelqu’un qui soit à la fois iraquien et terroriste étranger.

$p$	$q$	$p \vee q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

Comme dans le cas de la conjonction, on peut aussi caractériser la signification de “ $\vee$ ” en termes d’inférences qui l’introduisent dans des formules ou l’éliminent d’une formule :

$$\frac{p}{p \vee q} \vee \mathbf{I} \qquad \frac{q}{p \vee q} \vee \mathbf{I} \qquad \frac{p \vee q, \neg p}{q} \vee \mathbf{E} \tag{4}$$

Les deux règles d’introduction nous disent qu’on peut inférer “ $p \vee q$ ” si on a établi “ $p$ ” (et aussi qu’on peut inférer “ $p \vee q$ ” si on a établi “ $q$ ”) et qu’on peut éliminer des disjonctions dont on a établi qu’un des disjoints est faux : si un est faux, l’autre doit forcément être vrai. Cette règle d’inférence  $\vee \mathbf{E}$  s’appelle “le syllogisme disjonctif” et sa validité a été reconnue déjà par Aristote. Voici quelques exemples :

1. Je serai heureux ou sage. Je ne serai pas sage. Donc je serai heureux.
2. Je choisis ou bien une soupe ou bien une salade. Je ne choisis pas une soupe. Donc je choisis une salade.
3. Il faut ou bien être vigilant ou bien n’avoir pas peur. Il n’est pas le cas qu’il faut être vigilant. Donc il ne faut pas avoir peur.

## 5 L’implication et l’équivalence matérielles

Considérons les assertions suivantes :

- I1** Si j’étudie la logique, je serai heureux et sage.
- I2** A condition qu’elle fasse les exercices, elle réussira à l’examen.
- I3** Donné que je n’ai rien d’autre à faire, je peux très bien sortir ce soir.
- I4** Quand il pleut, je suis triste.
- I5** Si je ne m’appelle pas Philipp, je ne ferai jamais de la logique.
- I6** Si je ne fais jamais de la logique, alors je m’appelle Philipp.

Toutes ces phrases peuvent être formalisées par le connecteur “ $\rightarrow$ ” (“si ... alors —”),<sup>14</sup> qu’on appelle l’‘implication matérielle’, à condition qu’elles soient fausses si et seulement si leur antécédent (la proposition qui suit le “si”) est vrai et leur conséquent (la proposition qui suit le “alors”) est faux. Même si cette condition est certainement nécessaire,<sup>15</sup> il peut paraître douteux qu’elle est aussi suffisante. Le cas délicat est celui où l’antécédent est faux : est-ce que ceci est déjà suffisant pour que l’implication soit vraie, peu importe le conséquent ? En ce qui concerne la langue naturelle, on est, dans beaucoup de cas, tenté de dire non : il faut qu’il y ait une connexion entre l’antécédent et le conséquent, que l’antécédent, s’il était vrai, rendrait le conséquent probable, qu’il expliquerait pourquoi le conséquent est vrai etc.<sup>16</sup> Les avocats d’une ‘implication stricte’ défendaient l’idée qu’une implication n’est vraie que si l’antécédent nécessite le conséquent – s’il

<sup>14</sup> “Si ... alors —” n’est pas toujours l’expression la plus commode à substituer pour “ $\rightarrow$ ”, parce qu’elle nécessite un changement de l’ordre des phrases. Parfois “... seulement si —” est plus convenant.

<sup>15</sup> Il me semble clair que quelqu’un qui affirme (I1) à (I6) a tort si, respectivement, j’étudie la logique mais je ne serai pas heureux ni sage ; elle fait les exercices mais elle échoue à l’examen ; je n’ai rien d’autre à faire mais il n’est pas le cas que je peux très bien sortir ce soir ; il pleut, mais je ne suis pas triste ; je m’appelle Philipp et fera de la logique ; je ne fais jamais de la logique, mais ne m’appelle pas Philipp.

<sup>16</sup> L’évidence, cependant, n’est pas univoque. Nous reconnaissons, même dans le langage naturel, un certain type d’équivalence entre “Si je ne me trompe, vous êtes déjà venu” (“ $\neg p \rightarrow q$ ”) et “Ou je me trompe fort, ou vous êtes déjà venu” (“ $p \vee q$ ”) et entre “S’il me rencontre, il me salue toujours” (“ $p \rightarrow q$ ”) et “Il ne me rencontre jamais sans me saluer” (“ $\neg(p \wedge \neg q)$ ”).

est impossible (et non seulement : faux) que l'antécédent soit vrai et le conséquent soit faux (Ackermann 1950). La logique propositionnelle standard, cependant, n'a pas choisi cette voie : pour elle, il suffit pour la vérité d'une implication "si  $p$  alors  $q$ " qu'il n'est pas le cas que " $p$ " est vraie et " $q$ " est fausse – l'antécédent ne formule qu'une condition suffisante, mais aucunement nécessaire pour le conséquent.<sup>17</sup> C'est pour distinguer cette relation d'implication dont traite la logique standard d'autres types d'implications qui requièrent un lien plus étroit entre antécédent et conséquent qu'on appelle la première 'implication matérielle'.

Il y a différentes manières de justifier cette décision d'interpréter "si  $p$  alors  $q$ " comme équivalent à "ou bien  $\neg p$  ou bien  $q$ ". L'argument le plus fort, à mon avis, est que cette relation joue certainement un rôle important dans notre raisonnement propositionnel et que, de toutes les possibilités pour des connecteurs vérifonctionnels, ' $V-F-V-V$ ' correspond le plus à notre usage de "si ... alors ...". Un autre argument c'est que les phénomènes qui intéressaient les avocats de l'implication stricte sont mieux expliqués par une distinction entre implication et conséquence (cf. leçon 3) et entre les conditionnelles indicatives et subjonctives. Supposons que je tiens un crayon particulier et ne le lâche pas. Considérons les phrases suivantes :

**I7** Si je lâche le crayon, il tombe par terre.

**I8** Si je lâche le crayon, il se colle au plafond.

Intuitivement, nous pensons que si l'une des deux propositions doit être vraie, ce sera plutôt la première. Pourtant, l'antécédent des deux conditionnels ("Je lâche ce crayon") est faux dans la situation envisagée et donc les deux sont vraies dans la logique propositionnelle standard. Au lieu d'introduire une implication plus 'stricte', leur différence est expliquée par la différence entre deux autres phrases, à savoir les suivantes :

**IS1** Si je lâchais le crayon, il tomberait par terre.

**IS2** Si je lâchais le crayon, il se collerait au plafond.

(IS1) et (IS2), qu'on appelle des 'implications subjonctives', ont un autre comportement logique que (I7) et (I8) : pour qu'elles soient vraies, il est requis qu'il soit *impossible* que je lâche le crayon sans qu'il tombe par terre et qu'il est *impossible* que je le lâche sans qu'il se colle au plafond. Comme le deuxième n'est pas le cas, (IS2) est faux.<sup>18</sup>

Une implication matérielle, dans la logique propositionnelle standard, est vraie si et seulement s'il n'est pas le cas que l'antécédent est vrai et le conséquent est faux. "Si  $p$  alors  $q$ " est donc traité comme équivalent à "ou bien  $\neg p$  ou bien  $q$ ". En appliquant le syllogisme disjonctif ( $\vee\mathbf{E}$ ) à la formule " $\neg p \vee q$ ", on obtient "Si  $\neg\neg p$ , alors  $q$ ". En éliminant la double négation ( $\neg\mathbf{E}$ ), on retourne à "Si  $p$ , alors  $q$ ". La signification de " $\rightarrow$ ", qui représente l'implication matérielle, est donc donnée par la table de vérité suivante :

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

<sup>17</sup>Une manière de rendre ceci plausible est de penser des tables de vérité comme indiquant quelles possibilités on exclut en affirmant une proposition complexe. Si je te dis "si tu seras gentil, je te donnerai un bonbon", j'exclus la possibilité que tu sois gentil sans recevoir un bonbon. Je n'exclus pas, cependant, que je te donne un bonbon pour d'autres raisons que ta gentillesse.

<sup>18</sup>Le problème de l'interprétation des implications subjonctives, qui sont aussi appelées 'contre-factuelles' (puisque l'usage du conditionnel suggère que l'antécédent n'est pas le cas), est un problème majeur de la philosophie du langage. Certains, dont Quine, exprimèrent des doutes quant à l'existence d'une systématisation générale et satisfaisante de leur usage ordinaire. Comment attribuer, demandent-ils (cf. Quine 1950: 23), des valeurs de vérité aux phrases suivantes qui apparaissent être incompatibles

**IS3** Si Bizet et Verdi avaient été des compatriotes, Bizet aurait été italien.

**IS4** Si Bizet et Verdi avaient été des compatriotes, Verdi aurait été français.

Cette table de vérité pour “ $\rightarrow$ ” a comme conséquence immédiate que toute implication matérielle ayant un antécédent faux (comme (I5)) et toute implication matérielle ayant un conséquent vraie (comme (I6)) est vraie. Elle dit que si “ $p \rightarrow q$ ” est vrai, alors la vérité de “ $p$ ” est une *condition suffisante* pour la vérité de “ $q$ ” et la vérité de “ $q$ ” est une *condition nécessaire* pour la vérité de “ $p$ ” : “ $p$ ” ne peut pas être vrai sans que “ $q$ ” l’est aussi et la vérité de “ $p$ ” exclu le cas où “ $q$ ” est faux. L’implication matérielle est donc étroitement liée à la validité du schéma d’inférence suivant :

$$\frac{p}{p \rightarrow q} \rightarrow \mathbf{E} \quad (5)$$

Cette inférence, qui nous autorise à ‘éliminer’ une implication si on a établi son antécédent et d’en inférer son conséquent est aussi appelé ‘modus ponens’ (parfois, plus exactement, ‘modus ponendo ponens’) : c’est en ‘posant’ quelque chose (à savoir “ $p$ ”) que nous pouvons ‘poser’ quelque chose d’autre (à savoir “ $q$ ”).

L’implication matérielle pose quelques problèmes particuliers de formalisation. Dans le langage ordinaire, on trouve souvent des énoncés qui ne prédisent pas une condition suffisante, mais une condition nécessaire :

**I9** Il est content seulement si elle vient aussi.

(I9) ne spécifie pas une condition suffisante pour son bonheur futur, mais une condition nécessaire : si elle ne vient pas, il ne sera pas content. Il faut donc mettre la flèche dans la bonne direction : “s’il est content alors elle vient aussi” – on voit dans cet exemple que le langage ordinaire présuppose souvent un lien de causalité ou d’explication avec des phrases de la forme “si... alors —”. La logique, cependant, ne s’en occupe point : tout ce qu’il faut pour rendre vraie la proposition “s’il est content alors elle vient aussi” c’est qu’il ne soit pas le cas qu’il est content et elle ne vient pas.<sup>19</sup>

Un autre problème est l’ordre des constituants : Pour formaliser les phrases suivantes, il faut invertir l’ordre des propositions simples :

**I10** Pourvu qu’il fasse beau temps, on fera le picnic

**I11** Je t’aide à condition que tu sois gentil.

(I10) devient alors “si on fait le picnic, il fait beau temps” (“il n’est pas le cas qu’on fait le picnic et il ne fait pas beau temps”) et (I11) devient “si tu es gentil, je t’aide” (“il n’est pas le cas que je t’aide et tu n’es pas gentil”).

Considérons maintenant les phrases suivantes :

**E1** J’étais content si et seulement si elle me saluait

**E2** Il me rend visite toujours – et seulement – quand j’ai quelque chose à manger chez moi.

**E3** Elle y arrivera si, mais juste au cas où elle se dépêche.

**E4** Elle y arrivera si, mais seulement si elle se dépêche.

Dans ces phrases, on dit que deux propositions sont ou bien vraies ensemble ou bien fausses ensemble – elles ont les mêmes valeurs de vérité. L’implication matérielle assure une des deux parties de ceci : si l’antécédent est vrai, le conséquent doit l’être aussi. Ce que ces cas de l’*équivalence matérielle* rajoutent, c’est que si l’antécédent est faux, le conséquent doit l’être aussi. Si on utilise le principe de conversion (que de “si  $p$ , alors  $q$ ”, on peut déduire “si  $\neg q$ , alors  $\neg p$ ”), on voit que l’équivalence matérielle est équivalente à une conjonction de deux implications : (E1) est équivalent à “Si elle me saluait, je serais content et si j’étais content, elle me saluerait” – que son salut est une condition suffisante (premier conjoint) et nécessaire (deuxième conjoint) pour mon bonheur. On a donc les règles d’introduction et d’élimination suivantes :

$$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q} \leftrightarrow \mathbf{I} \quad \frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q} \leftrightarrow \mathbf{E} \quad \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p} \leftrightarrow \mathbf{E} \quad (6)$$

<sup>19</sup>Il ne faut pas confondre “... seulement si —” avec “... si seulement —” : dans le dernier cas, il s’agit d’un “si” ordinaire et “seulement” y est rajouté pour des raisons d’emphase.

En termes de table de vérité, “ $p \leftrightarrow q$ ” nous dit que “ $p$ ” et “ $q$ ” sont ou bien vraies ou bien fausses ensembles :

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$

## 6 Les tables de vérité

Nous avons vu comment les différents connecteurs déterminent la valeur de vérité d’une proposition complexe comme une fonction des valeurs de vérité de ses constituants atomiques. C’est ainsi que nous pouvons calculer des tables de vérité (et donc la signification) des propositions complexes : en déterminant leurs valeurs de vérité pour les différentes interprétations des propositions simples qu’elles contiennent.

Construisons une table de vérité pour “ $\neg(\neg p \vee \neg q)$ ”. Nous commençons par l’interprétation des propositions atomiques ; comme il y en a deux, “ $p$ ” et “ $q$ ”, ceci nous donne deux colonnes (quatre ‘possibilités logiques’) :

$p$	$q$
$V$	$V$
$V$	$F$
$F$	$V$
$F$	$F$

Comme les deux propositions atomiques sont niées dans la formule “ $\neg(\neg p \vee \neg q)$ ”, nous ajoutons deux colonnes avec les valeurs de vérité de leurs négations :

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$
$V$	$V$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$

A partir de ces deux nouvelles colonnes, nous calculons la valeur de vérité de leur disjonction :

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$

Dans notre formule initiale “ $\neg(\neg p \vee \neg q)$ ”, cette disjonction est niée :

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$

Dans la colonne à droite on retrouve maintenant les valeurs de vérité de la formule initiale “ $\neg(\neg p \vee \neg q)$ ” pour les quatre interprétations différentes de ses propositions atomiques. On voit que “ $\neg(\neg p \vee \neg q)$ ” n’est vraie qu’à condition que les deux propositions atomiques “ $p$ ” et “ $q$ ” soient vraies ; si au moins une d’entre elles est fausse, alors la proposition complexe est fausse aussi.

La table de vérité nous montre donc comment la valeur de vérité de cette formule complexe dépend des valeurs de vérité de ces constituants qui – selon le principe de vérifonctionnalité – la ‘composent’ d’une manière fonctionnelle.<sup>20</sup>

Une autre méthode, qui donne les mêmes résultats, est la suivante. Nous commençons directement avec la formule dont les valeurs de vérité pour les différentes interprétations nous intéressent et marquons des colonnes pour tous les propositions atomiques et les connecteurs qu’elle contient :

$\neg$	$(\neg$	$p$	$\vee$	$\neg$	$)q$

Nous rajoutons les interprétations pour les propositions atomiques dans toutes les colonnes correspondantes :

$\neg$	$(\neg$	$p$	$\vee$	$\neg$	$)q$
		V			V
		V			F
		F			V
		F			F

Nous calculons leur négations :

$\neg$	$(\neg$	$p$	$\vee$	$\neg$	$)q$
		F		F	V
		F		V	F
		V		F	V
		V		V	F

Toujours dans l’ordre dont la formule est construite de ses constituants, nous calculons la disjonction à partir des colonnes 2 et 5 :

$\neg$	$(\neg$	$p$	$\vee$	$\neg$	$)q$
		F	V	F	V
		F	V	V	F
		V	F	F	V
		V	F	V	F

Nous sommes donc arrivés au connecteur principal, qui est la négation de toute la parenthèse :

$\neg$	$(\neg$	$p$	$\vee$	$\neg$	$)q$
<b>V</b>	F	V	F	F	V
<b>F</b>	F	V	V	V	F
<b>F</b>	V	F	V	F	V
<b>F</b>	V	F	V	V	F

<sup>20</sup>Ceci veut dire que l’attribution des valeurs de vérité aux constituants atomiques *détermine* la valeur de vérité de la formule complexe. Mathématiquement, une fonction qui relie deux ensembles,  $f : A \rightarrow B$ , est une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à  $A$  et le deuxième à  $B$  ( $\{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$ ), qui est telle que le choix de  $a$  détermine celui de  $b$  : il n’est pas le cas qu’on a  $\langle a, b' \rangle$  et  $\langle a, b'' \rangle$  pour deux  $b', b'' \in B$  différents :  $(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \rightarrow b' = b''$ ).

Nous avons mis la colonne gauche en gras pour marquer qu'il s'agit de la colonne du connecteur principal et donc de celle où figurent les valeurs de vérité de la formule complexe. Il n'est pas le cas, en général, que cette colonne se trouve à gauche.

Comme dans la première méthode, les différentes lignes (les différentes interprétations des propositions atomiques) correspondent à (ou : représentent des) possibilités logiques. Si la colonne qui correspond au connecteur principal ne contient que des "V", on appelle la formule en question une "tautologie". Si elle ne contient que des "F", on l'appelle une "contradiction". Une tautologie est donc une proposition qui est vraie quelle que soit la possibilité logique considérée. Elle est vraie dans toutes les possibilités logiques, donc une 'nécessité logique'. On appelle de tels nécessités des "vérités logiques". Une proposition est logiquement vraie (une vérité logique) si et seulement si elle est vraie dans toutes les possibilités logiques, c'est-à-dire si elle est une tautologie.

La notion de 'tautologie' nous aide à établir la validité des inférences. Considérons l'inférence suivante :

Si les communistes n'ont pas de succès, Brunner est élue.  
 Brunner est élue.  
 Donc les communistes n'ont pas de succès.

Il s'agit du 'sophisme de l'affirmation du conséquent' qui a la forme suivante.

Si les communistes n'ont pas de succès, Brunner est élue.	$p \rightarrow q$
Brunner est élue.	$q$
Donc les communistes n'ont pas de succès	$p$

Mais pourquoi est-ce un sophisme ? Si nous voulons déterminer la validité de cet argument, nous avons à montrer que les prémisses ne peuvent pas être vraies et la conclusion fausse – qu'il n'y a pas d'interprétation qui rende vraies les prémisses et rende fausse la conclusion. Nous avons donc à montrer que l'implication matérielle correspondante est une tautologie. Construisons une table de vérité pour cette implication matérielle correspondante :

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

L'argument n'est pas valide car la troisième ligne ouvre la possibilité selon laquelle les prémisses sont vraies bien que la conclusion soit fausse. Quelqu'un qui pense que les communistes auront de succès et Brunner sera élue pourraient affirmer les prémisses et nier la conclusion.

Cet exemple nous montre que les tables de vérités ne nous montrent non seulement si un argument est valide (il est valide si et seulement si l'implication matérielle entre les prémisses et la conclusion est une tautologie), mais qu'elles nous permettent également de construire des contre-exemples à de fausses affirmations que telle ou telle proposition est tautologique.

Les tables de vérité sont aussi utiles pour gérer des arguments complexes avec plusieurs prémisses. Rien ne nous empêche de considérer plus que deux propositions atomiques à la fois. Comme les possibilités logiques sont déterminées par la vérité et fausseté des propositions atomiques, il faut alors considérer plus que quatre interprétations : 8 (=  $2^3$ ) pour trois propositions atomiques, 16 (=  $2^4$ ) pour quatre, 32 (=  $2^5$ ) pour cinq etc.

Les tables de vérité nous permettent aussi d'illustrer la conséquence suivante du principe de vérifonctionnalité : Comme le principe de vérifonctionnalité implique que la valeur sémantique (= la signification) d'un connecteur binaire (= à deux places) est complètement déterminée par sa

table de vérité, il s'ensuit qu'il ne peut y avoir que 16 ( $=2^{2^2}$ ) connecteurs binaires dans la logique propositionnelle. Ceci se voit en considérant les 16 possibilités différentes de distribuer les “V” et les “F” sur les quatre interprétations de “p” et “q” :

<i>p</i>	<i>q</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Nous avons déjà considéré les colonnes 2 (disjonction), 4 (*p*), 5 (implication matérielle  $p \rightarrow q$ ), 6 (*q*), 7 (équivalence), 8 (conjonction), 10 (négation de *q*), et 13 (négation de *p*). On retrouve dans la colonne 3, la ‘contre-implication’ (“ $q \rightarrow p$ ”) et on remarque que chaque opérateur a sa négation dans la colonne qui lui est symétrique par rapport à la double ligne entre les colonnes 8 et 9. Ainsi 15 est la ‘non-disjonction’ (‘rejet’ : ni *p* ni *q*), 10 la ‘non-équivalence’ (‘alternative’ ou disjonction exclusive) et 9 est la ‘non-conjonction’ (‘incompatibilité’ : pas à la fois *p* et *q*). On reviendra sur les lignes 1 (tautologie) et 16 (contradiction) plus tard.

## Références

- Wilhelm Ackermann, 1950, “Widerspruchsfreier Aufbau der Logik I”, *The Journal of Symbolic Logic* 15, pp. 33–57.
- Rudolf Carnap, 1947, *Meaning and Necessity : A Study in Semantics and Modal Logic*, Chicago, Illinois : University of Chicago Press, 1<sup>st</sup> éditions, deuxième édition : Carnap (1956).
- Rudolf Carnap, 1956, *Meaning and Necessity : A Study in Semantics and Modal Logic*, Chicago, Illinois : University of Chicago Press, 2<sup>nd</sup> enlarg. éditions, midway reprint 1988.
- Michael A. E. Dummett, 2000, *Elements of Intuitionism*, Oxford Logic Guides Series, Oxford, England : Clarendon Press, 2<sup>nd</sup> éditions, 1<sup>st</sup> edition 1977.
- Gottlob Frege, 1882, “Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift”, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik NF* 81, pp. 48–56, traduit par C. Imbert dans Imbert (1971: 63–69).
- Gottlob Frege, 1891, *Function und Begriff : Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft*, Jena, Germany : Hermann Pohle, traduit par C. Imbert dans Imbert (1971).
- Gottlob Frege, 1892a, “Über Begriff und Gegenstand”, *Vierteljahrszeitschrift für wissenschaftliche Philosophie* 16, pp. 192–205, traduit par C. Imbert dans Imbert (1971: 127–154).
- Gottlob Frege, 1892b, “Über Sinn und Bedeutung”, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik NF* 100, pp. 25–50, traduit par C. Imbert dans Imbert (1971: 102–126).
- Gottlob Frege, 1918a, “Der Gedanke. Eine logische Untersuchung.”, *Beitrage zur Philosophie des Deutschen Idealismus* 1, pp. 58–77, traduit par C. Imbert dans Imbert (1971).
- Gottlob Frege, 1918b, “Die Verneinung. Eine logische Untersuchung.”, *Beitrage zur Philosophie des Deutschen Idealismus* 1, pp. 143–157, traduit par C. Imbert dans Imbert (1971).
- Gottlob Frege, 1923, “Logische Untersuchungen. Dritter Teil : Gedankengefüge.”, *Beitrage zur Philosophie des Deutschen Idealismus* 3, pp. 36–51, traduit par C. Imbert dans Imbert (1971).
- Claude Imbert (éd.) 1971, *Gottlob Frege : Écrits logiques et philosophiques*, Paris, France : Éditions du Seuil, traduction et introduction de Claude Imbert.

Graham Priest, 1993, “Can Contradictions Be True? (II)”, *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume* 67, pp. 35–54.

Willard van Orman Quine, 1950, *Methods of Logic*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press.

Bertrand Arthur William Russell, 1905, “On Denoting”, *Mind* 14, pp. 479–493, traduit par J.-M. Roy dans Russell (1989: 203-218).

Bertrand Arthur William Russell, 1989, *Écrits de Logique Philosophique*, Paris, France : Presses Universitaires de France..