Troisième leçon

Cours d'introduction à la logique et la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Philipp Keller

A lire pour le cours du 18 novembre 2003

1 Le langage-objet et le métalangage

Dans la deuxième leçon, on disait, en effet, qu'une négation est vraie si et seulement si la proposition niée *ne* l'est *pas*, qu'une conjonction est vraie si et seulement si le premier *et* le deuxième conjoint sont vrais, qu'une disjonction est vraie ssi le premier disjoint *ou* le deuxième est vrai, qu'une implication matérielle est vraie ssi *si* l'antécédent est vrai, *alors* le conséquent l'est aussi et finalement qu'une équivalence matérielle est vraie ssi la première proposition est vraie *si et seulement si* la deuxième l'est aussi. N'avons-nous pas argumenté dans un cercle ? Ne s'agit-il pas d'une circularité vicieuse ?

Pour répondre à ces questions, il faut se rappeler de la distinction entre usage et mention. Il peut certainement y avoir une circularité epistémique – quelqu'un qui ne possède pas les concepts mêmes de ces relations logiques entre propositions aurait des difficultés à comprendre leur sémantique (même si les tables de vérité l'aideraient certainement). Mais, dû à la distinction entre langage-objet et métalangage, il ne s'agit pas d'une circularité logique, ni d'une circularité vicieuse.

Nous nous servons des mots pour parler du monde et des noms des mots pour parler des mots. Mettre des guillemets autour d'une expression linguistique est une manière – mais pas la seule – de former de tels noms.[1] On utilise un mot en énonçant une phrase qui le contient. On mentionne un mot ou une chose en utilisant un nom pour ce mot ou cette chose, dans le cas de la mention d'un mot ; par exemple l'expression qui est formée par des guillemets, le mot en question et encore des guillemets.

Un avantage de la création des noms des expressions à l'aide des guillemets est qu'elle peut être itérée : "Genève est jolie" parle de Genève et contient "Genève". " "Genève" a six lettres" parle du mot "Genève" est contient " "Genève" ". " "Genève" " désigne "Genève" qui désigne Genève. Le mot " "Genève" " contient six lettres et une paire de guillemets ; "Genève" contient six lettres et pas de guillemets ; et Genève contient des personnes, des bâtiments et une université.

Il y a une distinction entre deux langages – le *langage-objet* et le *métalangage* – liée à la distinction entre l'utilisation et la mention d'un mot. La phrase :

Genève est une jolie ville. (1)

est une phrase du langage-objet, puisqu'elle me sert à parler d'une réalité qui n'est aucunement linguistique. La phrase

"Genève" est mon mot préféré. (2)

[1] Une autre manière est de citer une phrase et de lui donner un numéro : c'est ainsi que nous donnons des exemples de phrases, comme les phrases (1), (2) et (3) qui suivent. Nous utiliserons donc les expressions "(1)", "(2)" et "(3)" comme des noms pour ces phrases.

me sert à parler d'un mot du français : (2) fait partie d'un métalangage, c'est-à-dire du langage à l'aide duquel je parle d'un autre langage – du langage-objet dont font partie des phrases comme (1) (et qui, dans ce cas, est le français). En itérant la procédure, on obtient :

" "Genève" est mon mot préféré." est une phrase bien formée du métalangage. (3)

(3) est une phrase qui appartient à un méta-métalangage, un langage qui me permet de parler du métalangage dont fait partie la phrase (2). La distinction entre langage-objet et métalangage est une distinction relative. (3) est dans un métalangage relatif à (2) qui, à son tour, appartient à un métalangage par rapport à (1). C'est par rapport à (1) que (3) appartient à un méta-métalangage.

Nous retrouvons les mêmes phénomènes lorsque nous attribuons la vérité ou la fausseté à une phrase. Pour dire que (1) est vraie, par exemple, nous disons :

"Genève est une jolie ville." est vraie. (4)

Nous aurions aussi pu utiliser un autre nom pour la même phrase, tel que :

(1) est vraie. (5)

Il faut distinguer des expressions comme "…est vrai" qui appartiennent au métalangage des expressions comme "Genève", "$\wedge$" et "$\neg$" qui appartiennent au langage-objet. Les premières prennent des noms des phrases (du langage-objet) pour en faire des phrases (du métalangage), tandis que les dernières prennent des phrases (du langage-objet) pour en faire des phrases (du langage-objet).

La décision de me servir du français pour les trois langages différents était arbitraire : j'aurais pu choisir l'allemand pour le langage-objet, l'anglais pour le métalangage et réserver le français au méta-métalangage. On aurait alors :

Genf ist eine schöne Stadt. (6)

"Genf" is my favourite word. (7)

" "Genf" is my favourite word." est une phrase bien formée du métalangage. (8)

Comme (1) est une phrase bien formée du français, (6) est une phrase bien formée de l'allemand. (7) est une phrase qui appartient à l'anglais et ne contient pas de mot allemand (puisque le mot " "Genf" " est un mot qui appartient à l'anglais). Finalement, (8) est entièrement une phrase du français, comme l'est (3).

Nous nous servons d'un métalangage pour donner des traductions :

En allemand, l'expression "Genf" est utilisée pour désigner la ville de Genève. (9)

(9) est une phrase du français dans laquelle on mentionne le mot allemand "Genf". Des clauses comme (9) peuvent aussi nous servir pour spécifier les conditions de vérité d'une phrase :

"Genf ist eine schöne Stadt" est vraie si et seulement si Genève est une jolie ville. (10)

Les conditions de vérité de la phrase (extensionnelle) "Genf ist eine schöne Stadt", spécifiées dans (10), nous donnent la signification de cette phrase. On utilise donc le métalangage (le français, dans ce cas), pour relier les mots d'un langage-objet (ici l'allemand) avec leurs significations.

L'importance de la distinction entre langage-objet et métalangage devient apparente si on revient sur la distinction entre vérité et validité. Nous disions qu'on ne peut pas dire d'un argument qu'il est vrai ou qu'il est faux, mais qu'on peut dire qu'un argument est valide ou ne l'est pas.[2] Mais

[2]Ce phénomène s'insère dans un cadre général : il y a beaucoup de manières autre que l'attribution de vérité ou de fausseté d'exprimer qu'une expression linguistique est 'correcte' ou 'bonne' : une question, par exemple, ne peut être ni vraie ni fausse, mais elle peut être appropriée, intéressante, bonne etc. De même, un ordre n'est ni vrai ni

alors *ceci* peut être vrai ou faux, c'est-à-dire qu'il peut être vrai que tel et tel argument est valide. Cette dernière phrase, cependant, est une affirmation dans le métalangage, plus précisément dans le métalangage relatif au langage qui contient "cet argument est valide". Si nous remplaçons "cet argument" par un autre nom de l'argument dont nous voulons parler, par exemple par " "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage" ", nous voyons que "cet argument est valide", à son tour, appartient à un métalangage par rapport au langage dont nous nous servons pour parler du bonheur créé par la logique. Le prédicat "…est valide", comme le prédicat "…est vrai", s'applique à des expressions linguistiques ; il faut les composer avec un *nom* de telles expressions pour faire une phrase bien formée.

Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage. (11)

"Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage" est valide. (12)

" "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage" est valide." est vrai. (13)

Cette caractéristique d'avoir besoin des noms d'expressions pour former des phrases bien formées n'est pas conservée si on transforme des prédicats comme "…est vrai" et "…est valide" en des opérateurs propositionnels (des expressions qui prennent des phrases pour former des phrases) comme "il est vrai que …" et "donné que …, il s'ensuit de $\cdots$". Mais ces expressions appartiennent aussi au métalangage, puisqu'elles nous servent à parler des expressions (propositions, phrases). Au lieu de (13), on peut donc aussi dire :

Il est vrai que "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage" est valide. (14)

(14), comme (13), appartient au métalangage par rapport à (12). Au lieu de (12), nous pouvons utiliser l'opérateur propositionnel binaire "donné que …, il s'ensuit de $\cdots$" (un opérateur qui prend deux phrases pour en faire une troisième) :

Étant donné que si j'étudie la logique, je serai heureux et sage, et que j'étudie la logique, il s'ensuit que je serai heureux et sage. (15)

Il est essentiel de ne pas confondre cette relation de "étant donné que …, il s'ensuit que $\cdots$" avec la relation de "si …alors $\cdots$". "Si …alors $\cdots$" est une expression qui appartient au langage-objet : elle prend (*utilise*) deux phrases pour en faire une troisième. "Étant donné que …, il s'ensuit que $\cdots$", de l'autre côté, appartient au métalangage et nous sert pour dire qu'il y a une relation de *conséquence logique* entre deux phrases, que l'une s'ensuit de l'autre. Nous abrégeons la relation exprimée par "étant donné que …, il s'ensuit que $\cdots$" par un nouveau signe, "$\models$".

Il y a d'autres relations 'objectuelles' qui ont des correspondantes 'métalinguistiques'. Comme nous utilisons la flèche 'simple' "$\rightarrow$" pour la relation exprimée par "si …alors $\cdots$", nous utilisons la flèche longue et 'épaisse' "$\Longrightarrow$" pour une relation de conséquence métalinguistique (non-spécifiée). Au lieu de

"Si p alors q" est vraie ssi si "p" est vraie alors "q" l'est aussi. (16)

faux, mais peut être justifié etc.

nous pourrons donc maintenant dire

$$\text{“}p \rightarrow q\text{” est vraie} \quad \Longleftrightarrow \quad p \Longrightarrow q \tag{17}$$

Il ne s'agit pas ici d'un nouveau formalisme, mais juste d'une manière semi-formelle d'abréger des locutions du langage ordinaire qui, tout le long de ce cours, nous sert comme métalangage pour parler de notre langage-objet $\mathcal{L}$, le langage de la logique propositionnelle.

Nous pouvons faire une distinction similaire pour d'autres connecteurs propositionnels. "$\wedge$", on l'a vu, exprime la relation de conjonction – ce connecteur fait partie du langage-objet dont nous étudions le comportement logique. Nous utilisons un autre connecteur, "&", pour parler *de* ce langage-objet. "&", en conséquence, appartient au métalangage. De même pour notre négation du langage-objet, "$\neg$", qui correspond, au métalangage, à "$\sim$" et pour "$||$", qui correspond à "$\vee$". Ceci nous donne :

$$\begin{array}{rcl}
\text{“}\neg p\text{” est vraie} & \Longleftrightarrow & \sim p \\
\text{“}p \wedge q\text{” est vraie} & \Longleftrightarrow & p\& q \\
\text{“}p \vee q\text{” est vraie} & \Longleftrightarrow & p||q \\
\text{“}p \rightarrow q\text{” est vraie} & \Longleftrightarrow & p \Longrightarrow q \\
\text{“}p \leftrightarrow q\text{” est vraie} & \Longleftrightarrow & p \Longleftrightarrow q
\end{array}$$

Nous voyons maintenant que la crainte d'une circularité vicieuse n'était pas justifiée : même si quelqu'un qui ne possède pas le concept de négation ne comprenait peut-être ni "$\neg$" ni "$\sim$", on n'a pas donné une explication de la signification du négation "$\neg$" qui utilise essentiellement ce signe "$\neg$" qu'on était en train d'expliquer (ce qui constituerait en fait un cas de circularité vicieuse). Nous l'expliquons en exploitant notre compétence d'un langage différent – du français qui nous sert comme métalangage – qui pourrait, si on en avait besoin, lui-même être formalisé et équipé avec une sémantique rigoureuse (comme nous l'avons fait avec le langage-objet, le langage de la logique des propositions).[3]

2 La validité et la vérité logique

Supposons qu'une inférence logique ait la forme suivante :

$$p.\ \text{Et } q.\ \text{Mais aussi } r.\ \text{Donc } s. \tag{18}$$

Nous avons vu qu'on peut mettre cette inférence dans la forme suivante :

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \hline s \end{array} \tag{19}$$

Étant donné la sémantique du connecteur "$\wedge$" ("et"), on peut aussi l'écrire comme suit :

$$\frac{p \wedge q \wedge r}{s} \tag{20}$$

Nous avons dit qu'en disant qu'un argument de la forme (19) ou (20) est valide, on mentionne les propositions "p", "q", "r" et "s" et on ne les utilise pas. Dire qu'un argument de cette forme est

[3] Il y aura une étape dans le regressus de méta-(méta-méta-)langages où on se retrouve avec le langage ordinaire. Mais ceci ne signifie pas qu'il y ait une circularité vicieuse, aussi peu que le fait qu'on peut toujours continuer à demander "pourquoi ?" signifie qu'il n'y a pas d'explications suffisantes et acceptables.

valide revient à dire que

$$\text{Si “}p\text{”, “}q\text{” et “}r\text{” sont vraies, alors “}s\text{” est vraie aussi.} \tag{21}$$

Il s'agit ici d'une affirmation dans le métalangage : on n'utilise pas les phrases "p", "q" et "r" (rappelons qu'il s'agit d'abréviations pour des phrases comme "J'étudie la logique", "il pleut", "Dieu est omnipuissant" – on ne parle pas des études, du temps ou de Dieu), mais on les mentionne – on parle de ces phrases et on dit qu'elles se trouvent dans une certaine relation – une relation de *conséquence logique*. C'est cette relation de conséquence logique qui rend valide les inférences valides.

Une inférence est valide si et seulement s'il n'est pas logiquement possible que les prémisses soient vraies et la conclusion soit fausse – c'est-à-dire, s'il n'y a pas d'interprétation qui interprète les prémisses comme étant toutes vraies et la conclusion comme étant fausse. Une inférence de la forme (20) est valide si et seulement si la conséquence, "s", est une conséquence logique des prémisses "p", "q" et "r". C'est exactement dans ces cas-ci que l'implication matérielle 'correspondante' ("$(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$") est une tautologie. L'implication matérielle 'correspondante' est l'implication qui a la conjonction des prémisses comme antécédent et la conclusion comme conséquent.

Si nous voulons savoir si l'inférence $\frac{p \rightarrow \neg p}{\neg p}$, par exemple, est valide, il faut voir s'il est possible que la prémisse, "$p \rightarrow \neg p$", soit vraie et la conclusion, "$\neg p$", soit fausse. Nous en faisons donc des tables de vérité :

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	V

p	$\neg p$
V	F
F	V

Nous observons qu'il n'y a pas de ligne dans le premier tableau (à gauche) qui contient un "V" et dont la ligne correspondante dans le deuxième tableau (à droite) contient un "F". Nous pouvons également vérifier la validité de l'argument en faisant la table de vérité de l'implication matérielle.

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$
V	F	F	V
F	V	V	V

On peut donc dire : Un argument est valide si et seulement si sa conclusion est une conséquence logique de ses prémisses. Pour ceci, il est suffisant et nécessaire que l'implication matérielle soit une tautologie. Nous avons donc la relation suivante :

$$\models p \rightarrow q \qquad \Longleftrightarrow \qquad p \models q$$

On parle alors d'une implication formelle :

implication matérielle de q par p ("q" est inférée de "p")	$\Longleftrightarrow$	"$p \rightarrow q$" est vraie (ou bien "p" est fausse ou bien "q" est fausse.)
implication formelle de q par p ("q" est une conséquence de "p")	$\Longleftrightarrow$	"$p \rightarrow q$" est une tautologie (il n'est pas logiquement possible que "p" soit vraie et "q" fausse.)

La distinction 'matériel'/'formel' correspond à la distinction entre langage-objet et métalangage.[4] Quand je dis que si p, alors q, j'utilise les phrases "p" et "q" ; quand je dis que "q" est une

[4] Cette terminologie vient de l'usage de "formaliter" et "materialiter" par les logiciens médiévaux pour marquer la distinction entre langage-objet et métalangage. Ils parlaient aussi d'un 'mode matériel' de l'usage des mots (pour dire que ces mots étaient utilisés) et d'un 'mode formel' de leur usage (pour dire qu'ils étaient mentionnés).

conséquence logique de "p", que l'argument "p ; donc q" est valide ou que "$p \rightarrow q$" est une tautologie, j'utilise des noms pour ces phrases (ces noms sont des expressions de la forme ⟨ guillemets, la phrase concernée, guillemets ⟩) et je dis que ces phrases se trouvent dans une relation de conséquence logique.

Cette relation de conséquence logique est une relation sémantique puisqu'elle subsiste entre des phrases en vertu de leurs significations (qui nous sont données par des tables de vérité). C'est pour cette raison qu'on parle aussi d'une *conséquence sémantique*, pour distinguer cette relation de la relation de déductibilité qui est parfois appelée "conséquence syntaxique" (et dont on parlera plus tard).

A part la conséquence métalinguistique non-spécifiée ("$\Longrightarrow$"), nous pouvons donc maintenant introduire une abréviation spécifique pour dire qu'un argument est valide :

$$\text{“Un argument de la forme } \frac{p \wedge q \wedge r}{s} \text{ est valide.”} \quad \leadsto \quad \text{“}\{p \wedge q \wedge r\} \models s\text{”}$$

$$\text{“Un argument de la forme } \frac{\begin{array}{c} p \\ q \\ r \end{array}}{s} \text{ est valide.”} \quad \leadsto \quad \text{“}\{p, q, r\} \models s\text{”}$$

Dans le cas où on n'a qu'une seule prémisse (par ex. une conjonction comme dans le premier exemple qui précède), nous pouvons laisser tomber les crochet "{" et "}" : on écrira juste "$p \wedge q \wedge r \models s$". Ce nouveau signe "$\models$" n'est qu'une autre notation pour la flèche double : au lieu d'écrire "$p \wedge q \wedge r \Longrightarrow s$", on écrira "$p \wedge q \wedge r \models s$", au lieu de "$p\&q\&r \Longrightarrow s$" on écrira "$\{p \wedge q \wedge r\} \models s$".

On a remarqué que "$\models$", faisant partie du métalangage, peut tout de même être interprété comme opérateur propositionnel. Au lieu de le lire comme "...est une conséquence sémantique de $\cdots$" – expression qui a besoin de deux *noms de phrases* pour faire une phrase –, on peut aussi l'interpréter comme "Il s'ensuit de la proposition que ...que $\cdots$" ou "Étant donné que ..., il s'ensuit que $\cdots$", expressions qui ont besoin de deux *phrases* pour faire une phrase – mais qui appartiennent néanmoins au métalangage.[5] Interprétant "$\models$" comme ceci, nous pouvons nous passer des guillemets et écrire :

$$p \models q \tag{22}$$

(22) désigne le résultat de la juxtaposition de l'expression "Il s'ensuit de la proposition que", de la phrase représentée par "p", de l'expression "que" et la phrase représentée par "q". Si "p" représente "Anne est amoureuse de Jean" et "q" représente "Anne est amoureuse de quelqu'un", alors (22) devient la phrase suivante :

Il s'ensuit de la proposition qu'Anne est amoureuse de Jean que
Anne est amoureuse de quelqu'un. (23)

Même si cette abréviation "$\models$" est communément utilisée et utile, elle entraîne une certaine confusion entre usage et mention. Étant donné qu'on se trouve dans le métalangage, une meilleure manière de dire que "q" est une conséquence sémantique de "p" serait la suivante :

$$\text{“}p\text{”} \models \text{“}q\text{”} \tag{24}$$

Dans (24), les phrases "p" et "q" sont mentionnées et "$\models$" est utilisé pour signifier la relation de conséquence sémantique ("$\models$" est donc lue comme : "a comme conséquence (sémantique)" ou "implique formellement"). (24) rend donc explicite le fait que la relation de conséquence représentée

[5] Il ne faut pas penser que toute expression appartenant au métalangage opère sur des noms d'expressions. L'opérateur "il est vrai que ...", l'exemple paradigmatique d'une expression du métalangage, a besoin d'une phrase (et non pas d'un nom d'une phrase) pour en faire une phrase plus complexe.

par "$\models$" appartient au métalangage et non pas au langage-objet.

Néanmoins, (24) pose un problème subtil. En logique, on l'a vu, on n'a non seulement affaire à des arguments concrets, formulés dans le langage ordinaire (le français), mais à des schémas ou des squelettes d'arguments : on étudie la *forme* des arguments et un argument est considéré comme valide seulement si tous les autres arguments ayant la même forme le sont aussi. On a essayé de représenter cet aspect de généralité en remplaçant les phrases concrètes ("j'étudie la logique", "je serai heureux et sage" etc.) par des lettres ("p", "q" etc.) – et on a dit qu'il est arbitraire quelles phrases ordinaires on substitue pour ces lettres. Au niveau du métalangage, cependant, ceci crée un problème.

Le problème vient du fait qu'on veut dire, par une assertion de la forme "$p \models q$" que, quelques soient les phrases substituées pour "p" et "q" dans "$p \models q$", la phrase qui en résulte est vraie. Malheureusement, on n'arrive pas à dire cela en affirmant la phrase " "p" $\models$ "q" " – dans cette phrase, les noms de phrases " "p" " et " "q" " ne désignent que ces phrases précises. Pour voir ceci, considérons la situation suivante : supposons que nous introduisons un nom 'variable' ou 'schématique', "Legrand", pour désigner la personne la plus grande dans la salle. On peut alors l'utiliser dans des phrases comme "Legrand est plus grand de 2 mètres", "Legrand est celui qui voit le mieux au cinéma de nous tous" etc., voulant dire que quelque soit la personne la plus grande dans la salle (supposons qu'on ne le sait pas), de toute manière elle sera plus grande que 2 mètres, privilégiée au cinéma etc. Même si nous arrivons, à l'aide de "Legrand", à avoir un 'nom variable' pour une personne, ceci ne signifie pas que le *nom* lui-même est variable, mais seulement que la personne qu'il désigne varie avec la population de la salle où nous nous trouvons : dans une autre salle, il désignera une autre personne. Mais ceci ne veut pas dire que le nom change : il restera vrai, par exemple, que "Legrand" est un nom composé de sept lettres, qu'il a été inventé par nous etc., même si la personne désignée par "Legrand" s'appelle "Otto" à une occasion et "Jean-Marc" à une autre. Il n'est pas vrai que la phrase " "Legrand" est composé de quatre lettres" devient vraie si "Legrand" désigne quelqu'un qui s'appelle "Otto". La variabilité que "Legrand" possède dans le langage-objet est donc perdue au niveau du métalangage : même si "p" et "q" désignent des propositions arbitraires, leurs noms ne le font pas.

Pour échapper à ce problème, il faut introduire des expressions pour des noms arbitraires. Nous introduisons donc des lettres minuscules grecques "ϕ" (prononciation : "phi"), "ψ" ("psi"), "χ" ("chi") et "ξ" ("xi") pour parler des propositions d'une complexité arbitraire. Il y a donc une différence cruciale entre les lettres romaines et grecques : les lettres romaines nous servent comme *abréviations* des propositions. Nous pouvons, par exemple, remplacer toute occurrence de "p" par la phrase "Sam veut se marier" et toute occurrence de "q" par "Marie a faim". Les lettres grecques, au contraire, sont des *noms* de phrases : nous pouvons, si nous voulons, remplacer "ϕ" par " "Marie a faim." " et "ψ" par " "Sam veut se marier" ". Si ϕ est un nom pour "Marie a faim" et ψ est un nom pour "Sam veut se marier", nous pouvons donc dire :

"Marie" fait partie de ϕ.

ψ consiste en quatre mots.

En bref, "ϕ" et "ψ" ne sont pas des abréviations de phrases, mais des abréviations de noms de phrases. Au lieu de (24), nous dirons donc :

$$\phi \models \psi \tag{25}$$

3 La quasi-citation

Néanmoins, l'introduction de noms pour désigner des propositions arbitraires pose des problèmes subtiles. Pour voir ceci, rappelons que nous ne voulons non seulement parler de n'importe quelles expressions d'un certain type (par exemple, de tous les noms de propositions), mais que nous voulons parler de toutes les expressions qui désignent des propositions d'un certain type. Par exemple, nous voulons dire que toute proposition conjonctive a comme conséquence sémantique ses conjoints.

Jusqu'à maintenant, on s'est servi des expressions comme "toute proposition ayant la même forme que "$p \wedge q$" ", "le résultat de compléter le connecteur "$\ldots \rightarrow \cdots$" avec des phrases" etc. Mais ceci ne nous aide pas à exprimer qu'une conjonction implique formellement ses conjoints. Si nous disions

$$\phi \wedge \psi \models \phi \tag{26}$$

nous ne pourrions plus substituer "Sam a faim" pour ϕ et "Marie veut se marier" pour ψ. Ceci nous donnerait

$$\text{“Sam a faim”} \wedge \text{“Marie veut se marier”} \models \text{“Sam a faim”} \tag{27}$$

(27) cependant, est un non-sens, parce que "$\wedge$" relie des phrases et non pas des noms de phrases. Essayons le suivant :

$$\text{“}\phi \wedge \psi\text{”} \models \phi \tag{28}$$

Le problème avec (28), comme avec (24), est que nous avons perdu la généralité. "$\phi \wedge \psi$" n'est un nom que pour cette expression précise (la lettre grecque "ϕ", suivie de "$\wedge$" et de la lettre grecque "ψ"). Ce dont nous avons besoin, au contraire, c'est une manière de mentionner une expression (arbitraire) ayant une certaine forme (non-arbitraire).

A ce propos, Quine a introduit la 'quasi-citation', qui se fait avec des demi-crochets, qui s'appellent 'demi-crochets de Quine' ("Quine corners"). L'expression

$$\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner \tag{29}$$

désigne la formule qui commence avec ϕ (c'est-à-dire l'expression arbitraire dénotée par "ϕ"), continue avec "$\wedge$" et finit par ψ. (29) nous permet de parler de toutes les expressions, de n'importe quelle complexité, ayant une certaine forme (à savoir, dans l'exemple, une forme conjonctive). De la même manière, $\ulcorner(\mu)\urcorner$ dénote le résultat d'enfermer l'expression μ entre parenthèses.

En général, des matrices comme par ex. "$\ulcorner \cdots \wedge \cdots \urcorner$", "$\ulcorner(\ldots)\urcorner$" etc. nous servent pour construire des noms complexes, comme le font par exemple "le père de ..." ou "la moitié de ...". Si Sam est une personne, alors "le père de Sam" dénote le père de cette personne. Si a est un certain nombre, alors "la moitié de a" dénote la moitié de ce nombre. Si ϕ est une certaine expression, alors $\ulcorner(\phi)\urcorner$ dénote le résultat d'enfermer cette expression dans des parenthèses. Si ϕ est "Sam", alors $\ulcorner(\phi)\urcorner$ est l'expression "(Sam)". Si ϕ est "Sam a faim" et ψ est "Marie veut se marier", alors $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ devient "Sam a faim et Marie veut se marier" (le nom de la proposition conjonctive). Nous pouvons, bien sûr, substituer "p" pour ϕ et "q" pour ψ, et on obtient alors de (29) l'expression suivante :

$$\text{“}p \wedge q\text{”} \tag{30}$$

(30) est un nom de la conjonction des deux propositions simples. Nous pouvons donc concevoir (29) comme le nom d'une proposition qui contient des lacunes "$\ldots \wedge \cdots$", où la première lacune (représentée par les points de suspension "$\ldots$") est remplie avec ϕ et la deuxième lacune (représentée par "$\cdots$") est remplie avec ψ. L'avantage d'avoir des noms pour des propositions non-spécifiées est que ϕ et ψ peuvent être de n'importe quelle complexité : dans (29), nous pouvons aussi substituer "$p \rightarrow q$" pour ϕ et "$(p \vee q) \wedge r$" pour ψ. L'avantage des demi-crochets n'est visible qu'avec des noms complexes : $\ulcorner \phi \urcorner$ est juste ϕ.

C'est avec ces demi-crochets que nous arrivons finalement à une formulation satisfaisante de (26) :

$$\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner \models \phi \tag{31}$$

L'expression (31) désigne le résultat de la juxtaposition de l'expression "Étant donné la proposition que", de la phrase *désignée* par ϕ, du connecteur "$\wedge$", de la phrase *désignée* par ψ, de l'expression "il s'ensuit que" et de la phrase *désignée* par ϕ. Si ϕ désigne "Sam a faim" et ψ désigne "Marie veut se marier", alors (31) devient la phrase suivante :

$$\text{Étant donné que Sam a faim et Marie veut se marier, il s'ensuit que Sam a faim.} \tag{32}$$

C'est cet usage que nous adopterons par la suite.

4 Les tautologies et les contradictions

Une inférence logique est valide si et seulement s'il n'est pas logiquement possible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse, c'est-à-dire si toute interprétation de ces constituantes simples qui rend vraie les prémisses rend également vraie la conclusion. Étant donné la signification de l'implication matérielle "$\rightarrow$" – qu'elle est vraie si ce n'est pas le cas que l'antécédent est vrai et le conséquent faux – une inférence qui a "p" comme prémisse et "q" comme conclusion est valide si et seulement si "$p \rightarrow q$" est une tautologie.

Une proposition est une tautologie si et seulement si elle est vraie dans toutes les possibilités logiques, c'est-à-dire vraie sous toutes les interprétations de ses constituantes simples. C'est pour cela que les tautologies sont appelées '*vérités logiques*'. La négation d'une tautologie, étant donné la signification de "$\neg$", est une proposition qui est fausse dans toutes les possibilités logiques – il n'y a aucune interprétation de ses constituantes simples qui la rende vraie. On appelle ces faussetés logiques des *contradictions*.[6]

Il s'ensuit que les tautologies et les contradictions jouent un rôle particulier dans les inférences : Une tautologie, puisqu'elle ne peut pas être fausse, peut être inférée de n'importe quelle prémisse. Quelques soient les prémisses dont on infère la tautologie, il n'est pas logiquement possible que ses prémisses soient vraies *et* la tautologie fausse. Une tautologie peut même être inférée d'un ensemble vide de prémisses. Une contradiction, au contraire, est une prémisse dont on peut inférer n'importe quelle conclusion. Quelque soit la conclusion qu'on veut en tirer, il n'est pas logiquement possible que la prémisse (la contradiction) soit vraie et que la conclusion soit fausse.

Une tautologie paradigmatique est la proposition "$p \vee \neg p$".[7] "$p \wedge \neg p$" est une contradiction exemplaire. On voit donc par les considérations précédentes que les inférences

$$\frac{q}{p \vee \neg p} \qquad\qquad \frac{p \wedge \neg p}{q}$$

sont valides, quelque soit la proposition désignée par "q" : on peut inférer une tautologie de

[6] On a déjà rencontré les tautologies et les contradictions dans les colonnes 1 et 16 du tableau des 16 connecteurs binaires possibles. Elles correspondent à des 'fonctions de vérité' ('truth-functions') dans le même sens qu'une fonction constante peut être appelée "une fonction". Rien ne nous empêche d'introduire des 'connecteurs' "$\top$" et "$\perp$" avec les tables de vérité suivantes :

p	q	$p \top q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \perp q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Comme les valeurs de vérité de "$p \top q$" et de "$p \perp q$" ne dépendent pas des valeurs de vérité de "p" et de "q", une telle stipulation a peu d'intérêt.

[7] Comparez cette phrase avec la suivante : "Toute proposition $\ulcorner \phi \vee \neg \phi \urcorner$ est une tautologie." Dans "Une tautologie paradigmatique est la proposition "$p \vee \neg p$" ", on parle d'une phrase précise, par exemple de "il pleut ou il ne pleut pas". Dans "Toute proposition $\ulcorner \phi \vee \neg \phi \urcorner$ est une tautologie" on parle de toutes les propositions qui ont une certaine forme, c'est-à-dire qui sont composées d'une proposition simple, d'une expression pour la disjonction et de la négation de cette proposition simple. C'est pour ceci qu'on utilise les demi-crochets de Quine dans le dernier cas.

n'importe quoi et on peut inférer n'importe quoi d'une contradiction. Comme une tautologie s'ensuit de n'importe quelle prémisse (et même d'aucune prémisse), on peut dire de la manière suivante que "$p \vee \neg p$" est une tautologie :

$$\models p \vee \neg p$$

Pour dire que "$p \wedge \neg p$" est une contradiction, on peut dire :

$$\models \neg(p \wedge \neg p)$$

Si deux propositions complexes ont la même table de vérité, il n'y a pas de raison logique pour les distinguer. En ce qui concerne la logique, l'une dit la même chose que l'autre. On a un cas d'*équivalence sémantique* entre les deux. La relation entre la notion "équivalence sémantique" du métalangage et l'équivalence matérielle du langage-objet est la même que celle entre la notion de "conséquence sémantique" et l'implication matérielle. Dire que $p \rightarrow q$ revient à dire que ce n'est pas le cas que "p" est vraie et "q" fausse. Dire que ψ est une conséquence sémantique de ϕ revient à dire qu'il n'y a aucun cas (aucune possibilité logique) où ϕ est vraie et ψ fausse. Dire que $p \leftrightarrow q$, revient à dire que les deux propositions "p" et "q" sont ou bien les deux vraies ou bien les deux fausses. Dire que ϕ est sémantiquement équivalent à ψ, au contraire, revient à dire qu'ils reçoivent les mêmes valeurs de vérité dans tous les cas possibles, c'est-à-dire que leurs tables de vérité sont les mêmes.[8]

On dit souvent d'une contradiction qu'elle est contradictoire avec elle-même ou qu'elle se contredit elle-même. Nous avons ici une relation du même niveau que la conséquence sémantique : la relation de contradiction appartient aussi au métalangage. Deux propositions sont *contradictoires* si elles ne peuvent pas être vraies ensemble et ne peuvent pas être fausses ensemble ; il y a exactement une d'entre elles qui est vraie, puisque la vérité de la première entraîne la fausseté de la deuxième et la fausseté de la deuxième entraîne la vérité de la première.[9]

Le dernier conjoint est important : il y a d'autres manières pour des propositions d'être incompatibles que d'être contradictoires. Comparons les deux paires de propositions suivantes :

1. "La logique me rend heureuse." et "La logique ne me rend pas heureuse."
2. "La logique me rend heureuse." et "La logique me rend malheureuse."

Dans les deux cas, il est impossible que les deux propositions soient vraies (en même temps, de la même personne). Mais il y a une différence :

1. Dans le premier cas, on peut conclure la vérité de la deuxième proposition de la fausseté de la première.
2. Dans le deuxième cas, on ne le peut pas : les deux propositions pourraient être fausses, par exemple dans la cas où la logique me laisse indifférente.

Les propositions de la première paire ne peuvent ni être vraies ensemble ni être fausses ensemble ; les propositions de la deuxième paire ne peuvent pas être vraies ensemble, mais elles peuvent être fausses ensemble. Si deux propositions sont reliées de la même manière que la première paire, c'est-à-dire de telle manière qu'on peut conclure la vérité de l'une de la fausseté de l'autre *et* la fausseté de l'autre de la vérité de la première, on les appelle '*contradictoires*'. Si les deux propositions sont reliées de la même manière que la deuxième paire, c'est-à-dire d'une telle manière qu'on ne peut conclure que la fausseté de l'une de la vérité de l'autre (et donc la fausseté de la deuxième de la

[8] C'est cette notion d'"équivalence sémantique" qui nous permet de dire que "$p \vee \neg p$" est la *seule* tautologie, et que "$p \wedge \neg p$" est la *seule* contradiction. On y arrive par des transformations de formules. Considérons une tautologie 'complexe', comme "$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)) \leftrightarrow \neg p$". Comme c'est une tautologie, elle est vraie dans les quatre possibilités différentes d'attribuer des "V" et des "F" à "p" et "q". Elle est donc équivalente à "$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$", formule qui combine (par la disjonction) les quatre interprétations possibles de "p" et de "q". En appliquant une des 'lois de distribution' ($\ulcorner(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))\urcorner$), on obtient "$(p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q))$". Comme les conjoints tautologiques "$(q \vee \neg q)$" n'attribuent rien aux conditions de vérité de la disjonction, on peut les laisser tomber, et ainsi arriver à "$p \vee \neg p$".

[9] J'utilise "entraîne" ici pour désigner la relation de conséquence sémantique, désignée par "$\models$".

vérité de la première) mais pas forcément vice versa, on les appelle '*contraires*'. D'autres exemples de propositions contraires (mais pas contradictoires) sont les paires suivantes :

D1 "Mon livre est (uniformément) rouge.", "Mon livre est (uniformément) bleu."

D2 "Je suis à Berne.", "Je suis à Genève."

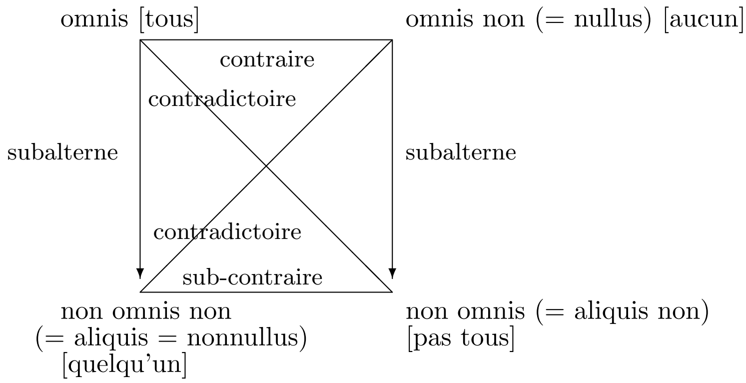
D3 "Benjamin est célibataire.", "Benjamin est marié."

On voit ici qu'il faut distinguer la possibilité et l'impossibilité *logique* d'autres formes de possibilité et d'impossibilité. Le fait que deux propositions ne peuvent pas être vraies ensemble (qu'elles sont contraires) peut avoir différentes raisons : le monde (D1), la métaphysique (D2), la langue (D3) etc.

Mis à part les relations de contradiction et de contrariété, la tradition a reconnu un troisième type d'opposition qui est la relation de sub-contrariété. Deux propositions sont sub-contraires si et seulement s'il n'est pas possible que les deux soient fausses ensemble, même si c'est possible qu'elles puissent être vraies ensemble. Les deux propositions "il y a une fête gratuite" et "il y a une fête qui n'est pas gratuite", par exemple, peuvent être vraies ensemble (s'il y a et des fêtes gratuites et des fêtes payantes), mais elles ne peuvent pas être fausses ensemble : il n'est pas possible que "il y a une fête gratuite" soit fausse (et donc qu'il n'y ait que des fêtes payantes) et que "il y a une fête qui n'est pas gratuite" soit aussi fausse (et donc qu'il n'y ait pas de fêtes qui ne sont pas gratuites).[10]

5 Le carré des oppositions

Une manière perspicace de présenter des relations sémantiques parmi des propositions est ce qu'on appelle un 'carré des oppositions'. Le plus ancien de ces carrés, lié au nom d'Appulée (né +/- en 125 AD) se fait dans la logique syllogistique comme suit :[11]



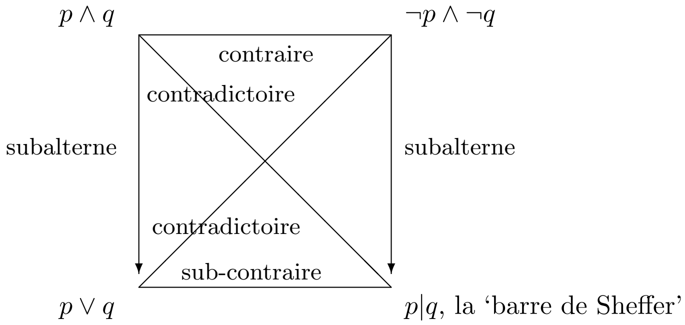
La relation de contradiction qui subsiste entre les coins dans les directions des diagonales de ce carré signifie que l'un est la négation de l'autre. Les propositions contraires, cependant, se distinguent par une négation interne : elles ne peuvent pas toutes les deux être vraies, mais elles peuvent être toutes les deux fausses : il n'est pas possible que toutes les choses soient F et que toutes les choses ne soient pas F (au moins s'il y a des choses qui peuvent être F du tout), mais il est possible qu'il y ait des F (et donc "tous ne sont pas F" soit fausse) et des non-F (et donc "tous sont F" soit également fausse). La relation de subalternation est juste la relation de conséquence sémantique : si toutes les choses sont F (et s'il y a des choses qui peuvent être des F), alors il n'est pas vrai que toutes les choses ne sont pas F ; si toutes les choses ne sont pas F (et s'il y a des choses qui peuvent être F), alors il n'est pas le cas que toutes les choses sont F. La sub-contrariété,

[10] Il faut présupposer, pour pouvoir montrer que les deux propositions ne peuvent pas être fausses ensemble, qu'il y ait des fêtes. Ceci correspond à la présupposition que le 'domaine de quantification' ne soit pas vide. On reviendra à ces problèmes dans la leçon 8.

[11] On reviendra à ce carré dans le contexte de la logique des prédicats.

finalement, correspond à la vérité logique (= validité) de la disjonction. S'il y a des choses qui peuvent être des F (ce qui est présupposé tout le long) et si nous en choisissons une et l'appelons "a", alors a est ou bien F ou bien a n'est pas F. Si a est F, alors il n'est pas vrai que tous ne sont pas F ; si a n'est pas F, alors il n'est pas vrai que tous sont F. Alors au moins une des deux propositions préfixées par "non omnis non" et par "non omnis" est vraie. La contrariété veut dire "pas les deux vraies" ; la sub-contrariété dit "pas les deux fausses".

On peut adapter le carré des oppositions d'Appulée à la logique propositionnelle comme suit :



p	q	$p|q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

On vérifie ce carré d'oppositions à l'aide des tables de vérité :

Contrariété : il n'a pas d'interprétation qui rende "$p \wedge q$" et "$\neg p \wedge \neg q$" vraies.

Sub-contrariété : il n'y a pas d'interprétation qui rende "$p \vee q$" et "$p|q$" fausses.

Subalternation : toute interprétation qui rend "$p \wedge q$" vraie, rend "$p \vee q$" vraie.

Subalternation : toute interprétation qui rend "$\neg p \wedge \neg q$" vraie, rend "$p|q$" vraie.

Contradiction : une interprétation rend "$p \wedge q$" vraie si et seulement si elle rend "$p|q$" fausse.

Contradiction : une interprétation rend "$p \vee q$" vraie ssi elle rend "$\neg p \wedge \neg q$" fausse.

6 Implication vs. conséquence

Ce que nous venons de rebaptiser par le nom barbare de "subalternation" est juste la relation de conséquence (sémantique). Nous avons vu que "q" est une conséquence sémantique de "p" si et seulement si "$p \rightarrow q$" est une tautologie. "$\models$" appartient au métalangage et "$\rightarrow$" appartient au langage-objet.

L'importance d'une distinction entre les deux relations est illustrée par un paradoxe qu'a soulevé pour la première fois Lewis Carroll, l'auteur de *Alice au pays des merveilles*, dans un article de deux pages (Carroll 1886). Achille, le personnage de la petite histoire, veut convaincre la tortue de la vérité de "q". Il produit alors un argument du type *Modus Ponens*, dont la tortue accepte la vérité des prémisses :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

La tortue, cependant, réplique que cet argument est un enthymème, qu'il y manque une prémisse, à savoir que "q" s'ensuit de "p" et de "$p \rightarrow q$". En réponse, Achille est d'accord d'ajouter ceci comme prémisse supplémentaire à l'inférence qui devient alors :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Mais la tortue n'est toujours pas convaincue que q. Elle est d'accord qu'il s'ensuit des trois prémisses – "$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$", "$p \rightarrow q$" et "$p$" – que q, mais elle insiste pour qu'on rajoute ceci comme prémisse. Achille le lui accorde et se trouve donc dans ce qu'on appelle un 'regressus à l'infini' ; il n'arrivera jamais à convaincre la tortue que q :

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q} \qquad \frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ (p \wedge p \rightarrow q) \rightarrow q \end{array}}{q} \qquad \frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \\ (p \wedge (p \rightarrow q) \wedge ((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)) \rightarrow q \end{array}}{q} \qquad \ldots$$

Ce dont la tortue a profité pour ridiculiser Achille était l'absence d'une distinction entre la relation de conséquence sémantique, qui justifie la validité du schéma d'inférence qu'on appelle 'modus ponens', et la relation d'implication matérielle.

Après l'avoir clairement distinguée de l'implication matérielle, nous pouvons maintenant noter plusieurs propriétés de cette relation de conséquence sémantique :[12]

1. L'ordre des prémisses n'est pas pertinent pour évaluer un argument comme valide ou non valide :

$$\{p_1, p_2, \ldots p_n\} \models r \qquad \Longrightarrow \qquad \{p_2, p_3, p_1, \ldots p_n, \ldots p_7, \ldots\} \models r$$

   On ne rend pas non valide un argument valide en changeant l'ordre des prémisses.

2. La validité est monotone :

$$\{p_1, p_2, \ldots p_n\} \models r \qquad \Longrightarrow \qquad \{p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots q_1, q_2, \ldots q_m\} \models r$$

   Si vous tenez un argument valide, votre interlocuteur ne peut pas vous contredire en acceptant l'argument tel qu'il est, mais en prétendant le rendre non valide en lui *ajoutant* une prémisse supplémentaire. (Dans le cas où on ajoute une prémisse qui contredit une prémisse déjà présente, "r" s'ensuit parce que n'importe quelle proposition est une conséquence sémantique d'une contradiction, c'est-à-dire par le schéma d'inférence 'ex falso quodlibet'.)

3. La validité est transitive :

$$\{p_1, p_2, \ldots p_n\} \models r \ \& \ \{r, q_1, q_2, \ldots q_n\} \models s \quad \Longrightarrow \quad \{p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_m\} \models s$$

   Si "r" s'ensuit des prémisses "p_1", "p_2", etc. ($i \in \mathbb{N}$) et si "s" s'ensuit de cette prémisse intermédiaire "r" et des prémisses "q_1", "q_2", etc. ($i \in \mathbb{N}$), alors on peut directement inférer "s" (sans avoir besoin d'inférer d'abord "r" de "p_1", "p_2" etc.).[13]

4. La validité est réflexive :

$$\{p_1, p_2, \ldots p_n\} \models p_i \qquad \text{(pour toute proposition } p_i \in \{p_1, p_2, \ldots\})$$

   De "Tous les hommes sont mortels. Socrate est un homme", il s'ensuit que Socrate est mortel, mais également que tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme.[14]

[12] Pour faciliter l'exposition, nous ne considérons ici que des arguments qui n'ont qu'un nombre fini de prémisses. Mais les propriétés de la validité en question valent aussi pour des arguments qui en ont un nombre infini.

[13] On obtient une formulation plus facilement reconnaissable comme celle d'un principe de transitivité si on assume qu'il n'y a pas de "q_i" et une seule prémisse "p_i" : $p \models r \ \& \ r \models s \implies p \models s$.

[14] Si l'ensemble des prémisses ne contient qu'un seul membre, on a une inférence triviale (mais valide !) : "Il pleut ; donc, il pleut." Ceci ne veut pas dire que la logique justifie le raisonnement circulaire : la logique ne nous montre pas qu'il pleut, mais qu'il pleut *s'il pleut*.

7 L'interdéfinissabilité des connecteurs

Une implication matérielle telle que "$p \rightarrow q$" est vraie si et seulement si ou bien "p" est faux ou bien "q" est vraie. Nous pouvons formuler ses conditions de vérité en utilisant la disjonction : "$p \rightarrow q$" est vraie si et seulement si "$\neg p \vee q$" est vraie. Cette équivalence est une équivalence au niveau du métalangage : "$p \rightarrow q$" est une conséquence sémantique de "$\neg p \vee q$" et "$\neg p \vee q$" est une conséquence sémantique de "$p \rightarrow q$". En bref, leurs tables de vérité sont les mêmes. On parlera d'une '*équivalence sémantique*'.

On remarque d'autres équivalences sémantiques. Deux paires de telles équivalences sont tellement importantes qu'elles sont appelées les "lois de Morgan", d'après Auguste De Morgan.[15] Voici une formulation préliminaire :

$$\begin{array}{lcl} \neg(p \wedge q) & \Longleftrightarrow & \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) & \Longleftrightarrow & \neg p \wedge \neg q \end{array}$$

Il faut bien interpréter ces équivalences. L'utilisation de la flèche double "$\Longleftrightarrow$" signifie qu'il s'agit des assertions au métalangage. Bien que les équivalences matérielles "$(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$" et "$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$" soient vraies aussi, les lois de Morgan font une assertion plus forte, à savoir que ces équivalences matérielles ne sont non seulement vraies mais également tautologiques.

Les lois de Morgan sont parfaitement générales : elles ne signifient non seulement, comme notre formulation le veut, que la table de vérité de la négation d'une conjonction de *propositions simples* et équivalent à la disjonction des négations de ces propositions simples, mais elles s'appliquent à toutes les propositions, complexes et simples. Si nous utilisons les lettres minuscules grecques pour signifier ces propositions d'une complexité arbitraire, pouvons-nous formuler les lois de Morgan comme suit ?

$$\begin{array}{lcl} \neg(\phi \wedge \psi) & \Longleftrightarrow & \neg \phi \vee \neg \psi \\ \neg(\phi \vee \psi) & \Longleftrightarrow & \neg \phi \wedge \neg \psi \end{array}$$

Pour des raisons vues auparavant, ces phrases sont mal formées.[16] On pourrait penser qu'il faut juste mettre des guillemets :

$$\begin{array}{lcl} \text{“}\neg(\phi \wedge \psi)\text{”} & \Longleftrightarrow & \text{“}\neg \phi \vee \neg \psi\text{”} \\ \text{“}\neg(\phi \vee \psi)\text{”} & \Longleftrightarrow & \text{“}\neg \phi \wedge \neg \psi\text{”} \end{array}$$

Comme avant, ces formulations ont le problème grave de n'être pas générales.[17]

En disant que toute négation d'une conjonction est équivalente à la disjonction de ses conjoints niés, on parle de toutes les propositions qui ont une certaine forme. Il faut donc utiliser les demi-crochets de Quine :

$$\begin{array}{lcl} \ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg \phi \vee \neg \psi\urcorner \\ \ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg \phi \wedge \neg \psi\urcorner \end{array}$$

Ces deux équivalences sémantiques nous informent que nous pouvons, en toute généralité, rempla-

[15] D'après Łukasiewicz (1935–1936), Guillaume d'Ockham les avait déjà reconnues.

[16] Si on remplace ϕ par "Marie a faim" et ψ par "Sam veut se marier", on obtient la proposition mal formée " "Marie a faim" $\wedge$ "Sam veut se marier" " – qui est mal formée puisque "$\wedge$" est un connecteur propositionnel et non pas une relation qui relie des phrases.

[17] Les expressions à gauche et à droite de la flèche double "$\Longleftrightarrow$" ne dénotent que ces expressions particulières. Celle en haut à gauche, par exemple, désigne l'expression qui commence par une négation, continue avec une parenthèse, la lettre grecque "ϕ", le signe de la conjonction, la lettre grecque "ψ" et une parenthèse.

cer une proposition $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$ (c'est-à-dire toute négation d'une conjonction) par la proposition $\ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$ (c'est-à-dire une disjonction de négations). Les lois de Morgan nous permettent de 'pousser' des négations devant des conjonctions et des disjonctions à l'intérieur de ces formules, en échangeant le connecteur "$\wedge$" ou "$\vee$" pour son connecteur 'dual' "$\vee$" ou "$\wedge$".

C'est grâce à cette généralité que les lois de Morgan nous permettent de *définir* "$\wedge$" à partir de "$\vee$" et "$\neg$". Mais qu'est-ce qu'une définition ? Une définition, tel que nous utilisons ce terme ici, est une équivalence sémantique qui introduit une nouvelle expression. C'est grâce à l'équivalence sémantique que le *definiendum* (la nouvelle expression à définir) peut être substituée dans n'importe quel contexte au *definiens* (les expressions 'anciennes' qui définissent la nouvelle expression). Au lieu de définir l'implication matérielle "$\rightarrow$" par sa table de vérité, nous aurions pu nous servir de l'équivalence sémantique entre $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et $\ulcorner\neg\phi \vee \psi\urcorner$ (si nous avons déjà introduit "$\vee$" et "$\neg$") :

$$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner \quad :\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg\phi \vee \psi\urcorner \tag{33}$$

(33) nous assure que toutes les formules ayant la forme exhibée à gauche ont la même table de vérité que la formule exhibée au côté droit de l'équivalence. Si nous avons donc déjà défini les connecteurs "$\vee$" et "$\neg$", nous pouvons introduire l'expression de gauche (le *definiens*) comme une autre manière d'écrire celle de droite (le *definiendum*). Le fait que nous interprétons l'équivalence sémantique comme équivalence qui détermine la signification du connecteur principal de la formule à gauche est indiqué par les deux points " :" devant le signe d'équivalence sémantique. Par (33), nous annonçons notre intention d'utiliser la formule à gauche comme variante notationnelle de celle à droite.[18]

Nous pouvons donc maintenant formuler notre constatation que les connecteurs propositionnels introduits ne sont pas tous indépendants (qu'ils peuvent être définis en termes d'autres) :

1. Si on ne prenait que "$\neg$" et "$\wedge$" comme primitifs (comme Brentano et Johnson), on pourrait définir les autres comme suit :

$$\begin{aligned} \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\phi \wedge \psi)\urcorner \end{aligned}$$

2. On pourrait aussi (comme Whitehead/Russell, Hilbert/Ackermann) ne prendre que "$\neg$" et "$\vee$" comme primitifs , et définir les autres en ces termes.
3. Si on ne prenait que "$\neg$" et "$\rightarrow$" comme primitifs (comme Frege et Łukasiewicz), on pourrait définir les autres comme suit :

$$\begin{aligned} \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg(\phi \rightarrow \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg\phi \rightarrow \psi\urcorner \\ \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner \quad &\Longleftrightarrow \quad [\ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\urcorner] \\ &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \phi))\urcorner \end{aligned}$$

Dans ces définitions, les signes définis n'apparaissent pas à la droite d'une définition (ils apparaissent dans l'avant-dernière ligne dans une simple équivalence, qui nous sert de modèle pour

[18]Lorsque la définition est basée sur une identité au lieu d'une équation, nous rajoutons les deux points au signe d'identité : "Définissons "a" comme suit : $a := \sqrt{b}$ ...". Au lieu des deux points, on utilise aussi "déf." comme indexe :

$$\begin{aligned} \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner \quad &_{\text{déf.}}\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg\phi \vee \psi\urcorner \\ a \quad &_{\text{déf.}}= \sqrt{b} \end{aligned}$$

la définition). Nous avons, cependant, le droit d'enchaîner des définitions. Ayant défini "$\wedge$", par exemple, à partir de "$\neg$" et de "$\rightarrow$", nous pouvons l'utiliser ensuite, avec "$\neg$" et "$\rightarrow$", pour définir "$\vee$".

8 D'autres équivalences sémantiques

Les équivalences sémantiques ne nous servent non seulement à réduire le nombre de connecteurs primitifs (c'est-à-dire ceux qui ne sont pas définis en termes d'autres connecteurs), mais sont également utiles pour la simplification des formules compliquées.

1. La conjonction et la disjonction sont commutatives ; "$p \wedge q$" et "$q \wedge p$" sont équivalentes, ainsi que "$p \vee q$" et "$q \vee p$" :

$$\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner \iff \ulcorner \psi \wedge \phi \urcorner$$
$$\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner \iff \ulcorner \psi \vee \phi \urcorner$$

2. Une autre 'loi' (équivalence sémantique générale) nous permet de distribuer la conjonction sur une disjonction et vice versa :

$$\ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \chi) \urcorner \iff \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \urcorner$$
$$\ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \chi) \urcorner \iff \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \urcorner$$

   Cette loi, comme son équivalent en algèbre "$x(y+z+\cdots+w) = xy+xz+\cdots+xw$", nous permet de 'factoriser', c'est-à-dire elle de transformer

$$(p \vee t) \wedge (q \vee r \vee s)$$

   en

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (t \wedge q) \vee (t \wedge r) \vee (t \wedge s)$$

3. Étant donné ce que nous avons dit des tautologies et des contradictions, il est toujours possible de laisser tomber une tautologie qui apparaît à l'intérieur d'une conjonction et une contradiction à l'intérieur d'une disjonction :

$$\ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \neg\psi) \urcorner \iff \phi$$
$$\ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \neg\psi) \urcorner \iff \phi$$

4. D'autres simplifications sont rendues possibles par le fait que ϕ est équivalent à toutes les propositions suivantes :

$$\ulcorner \neg\neg\phi \urcorner, \ulcorner \phi\wedge\phi \urcorner, \ulcorner \phi\vee\phi \urcorner, \ulcorner \phi\vee(\phi\wedge\psi) \urcorner, \ulcorner \phi\wedge(\phi\vee\psi) \urcorner, \ulcorner (\phi\wedge\psi)\vee(\phi\wedge\neg\psi) \urcorner, \ulcorner (\phi\vee\psi)\wedge(\phi\vee\neg\psi) \urcorner$$

Références

Lewis Carroll, 1886, "What the Tortoise Said to Achilles", *Mind* 104, pp. 691–93.

Jan Łukasiewicz, 1935–1936, "Zur Geschichte der Aussagenlogik", *Erkenntnis* 5, pp. 111–131.