Quatrième leçon

Cours d'introduction à la logique et la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Philipp Keller

A lire pour le cours du 25 novembre 2003

1 Déductibilité syntaxique vs. validité sémantique

En utilisant des tables de vérité pour déterminer la validité et la non-validité d'un argument, nous avons supposé que les propositions sont vraies ou fausses, c'est-à-dire qu'elles possèdent l'une ou l'autre de ces valeurs de vérité. La méthode des tables de vérité est une méthode *sémantique* précisément parce qu'il est fait référence à des propriétés 'extérieures' à la proposition, au sens où ces propriétés supposent l'existence d'un monde distinct de la proposition, un monde sur lequel 'porte' la proposition.

Il existe toutefois une autre méthode, dite *syntaxique*, pour tester la validité d'un argument, qui ne suppose pas d'emblée que les propositions aient une valeur de vérité. L'idée centrale consiste à essayer de *dériver* ou de *déduire* la conclusion de l'argument en partant de ses prémisses et en procédant *pas à pas*, au moyen de règles déterminées, jusqu'à sa conclusion.

Il est utile de considérer une métaphore empruntée aux échecs : les prémisses constituent la position de l'échiquier au départ ; les règles de dérivation correspondent aux règles qui permettent de déplacer les pièces et de poursuivre le jeu, et la conclusion correspond à une certaine position de l'échiquier après un certain temps de jeu. Les règles d'échecs sont 'syntaxiques' parce que vous n'avez pas besoin de savoir que telle pièce est 'le roi', ou telle autre 'le fou', pour apprendre à les manipuler. (En l'occurrence, l'interprétation 'monarchique' des échecs est parfaitement conventionnelle.)

Il est ainsi possible de distinguer trois degrés d'abstraction linguistique qui correspondent à différents niveaux de formalisation :

1.	"La terre tourne"	signification	vérité
2.	"p"	–	vérité
3.	"p"	–	–

Le premier niveau correspond au langage naturel, où les propositions sont douées de sens et ont des conditions de vérité. Le second niveau correspond aux propositions sur lesquelles porte la méthode sémantique, qui ont des conditions de vérité mais qui ne sont pas des variables sans signification déterminée. C'est à ce niveau-ci qu'on examine les schémas ('squelettes') d'inférences dont on établit la validité par des tables de vérité. Le troisième niveau, où on fait abstraction non seulement de la signification des propositions, mais aussi de leur vérité, correspond aux propositions sur lesquelles porte la méthode syntaxique, qui sont considérées comme de purs symboles sans signification déterminée et sans valeur de vérité particulière. De plus, le niveau (1) est formalisé par le niveau (2), qui est à son tour formalisé par le niveau (3).

Si ou non une proposition peut être dérivée de certaines d'autres ne concerne uniquement la syntaxe : il s'agit de la question s'il est possible de manipuler les symboles qui représentent la deuxième selon certaines règles purement structurelles de telle manière qu'on arrive à des symboles qui représentent la première. Elle est du même ordre que la question si telle est telle position peut être atteint, selon les règles du jeu, par telle et telle pièce d'échecs qui se trouve à telle et telle position.

Nous utiliserons le symbole "$\vdash$" pour signifier la 'conséquence' au sens syntaxique, c'est-à-dire la *déductibilité* (ou "dérivabilité"), et établirons plusieurs correspondances entre cette relation de dérivabilité $\vdash$ et la relation de conséquence sémantique (ou validité) $\models$. Mais d'abord, nous devons fournir une définition rigoureuse du langage formel de la logique des propositions.[1]

2 * Le langage de la logique des propositions

Pour avoir une idée claire de ce qui sera la syntaxe de notre logique propositionnelle, nous devons d'abord définir, d'une manière plus rigoureuse que nous l'avons auparavant, son langage formel :

Définition 1. *L'*alphabet *du langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle classique consiste en les signes suivants :*

1. *des propositions atomiques "p_0", "p_1", "p_2" ...(une infinité dénombrable)*[2]
2. *les connecteurs "$\neg$" ("ne...pas"), "$\wedge$" ("et"), "$\vee$" ("ou"), "$\rightarrow$" ("si...alors) et "$\leftrightarrow$" ("ssi")*
3. *des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules*

Au lieu de "p_0", nous écrivons parfois "p", pour "p_1" "q", "r" pour "p_2" etc.

Cette définition (1) nous permet de définir ce qu'est une formule bien-formée de notre langage $\mathcal{L}$ comme suit :

Définition 2. *Une* formule propositionnelle *est définie d'une manière récursive comme suit :*

1. *Toute proposition atomique "p_i" ($i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*
2. *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*
3. *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Comme avant, nous utilisons des minuscules grecques "ϕ", "ψ", "χ", ...pour abréger des noms des formules arbitraires (pas nécessairement atomiques). Il s'agit des noms métalinguistiques : "ϕ" ne fait pas partie de $\mathcal{L}$, notre langage-objet. L'ensemble de toutes les formules du langage $\mathcal{L}$ est dénoté par "$\mathsf{Fml}(\mathcal{L})$". Les demi-crochets de Quine sont utilisés pour parler de toutes les formules qui ont une forme particulière. "$\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$", par exemple, est un nom pour une formule arbitraire qui consiste en une parenthèse, un signe de négation, une proposition (simple ou complexe) et encore une parenthèse.

Pour rendre nos formules plus perspicaces, nous adoptons les conventions suivantes :
- "$\neg$" relie son argument plus fortement que "$\wedge$" et "$\vee$" : quand il précède une seule proposition, le connecteur "$\neg$" sera donc écrit sans parenthèses. Au lieu de "$\neg(p) \wedge \neg(p \vee q)$", nous écrivons donc "$\neg p \wedge \neg(p \vee q)$".
- Pour des occurrences répétées de "$\wedge$" et "$\vee$", on adoptera la convention "groupement à gauche" : les parenthèses qui se ferment vers la gauche sont implicites. Nous écrivons dont "$(p \wedge q \wedge r)$" pour "$((p \wedge q) \wedge r)$".

[1]Les sections marquées par une astérisque résument des informations d'une manière plus formelle : il n'est pas requis de savoir les reproduire et ils seront mis à disposition pour l'examen (s'il y en aura besoin).

[2]Les propositions atomiques sont souvent appelées "propositions variables", pour indiquer qu'elles sont considérées comme variables dans les schémas d'inférence. Comme on introduira plus tard les 'variables' (souvent appelées "variables individuelles") de la logique des prédicats qui sont d'un autre type (elles peuvent, par exemple, être liées par des quantificateurs etc.), j'évite cette dénomination trompeuse.

– Les parenthèses extérieures (qui ne suivent pas de connecteur ni sont suivies par un connecteur) sont implicites. Au lieu de “$(p \wedge q)$”, nous écrivons “$p \wedge q$”.

On peut souvent omettre les parenthèses en donnant des priorités aux connecteurs, dans l'ordre suivant : “$\leftrightarrow$”, $\rightarrow$”, “$\wedge$”, “$\vee$”, “$\neg$”. Ainsi, “$\neg p \wedge q$” correspond à “$(\neg p) \wedge q$”, etc.

Nous pouvons également définir ce qu'est une théorie :

Définition 3. *Une* théorie *est un ensemble (fini ou infini) de formules propositionnelles.*

Nous abrégeons des théories par “Th_1”, “Th_2” etc. Si nous parlons que d'une, nous utilisons “Th”. Notons qu'une théorie Th peut avoir un seul membre, p.ex. $\mathsf{Th} = \{\phi\}$, ou être vide $\mathsf{Th} = \emptyset$.

3 La barre de Sheffer

Un avantage d'une telle définition rigoureuse de la syntaxe de notre langue est qu'elle nous permet de revenir sur la question d'interdéfinissabilité des connecteurs. Nous avons déjà vu comment on peut définir “$\wedge$” en termes de “$\vee$” et de “$\neg$”, grâce aux lois de Morgan. Nous montrerons maintenant un résultat plus radical : il est possible de définir *tous* les connecteurs binaires à partir d'un seul. Mais pour ceci il faut d'abord élargir (temporairement) notre langage.

Considérons le connecteur “|”, appelé “barre de Sheffer” (“Sheffer's stroke”) (Sheffer 1913). Il est défini par la table de vérité suivante :

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi\vert\psi\urcorner$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

On voit que $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ représente la ‘non-conjonction’ de ϕ et de ψ ; $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ veut dire que ϕ est incompatible avec ψ, qu'au moins un des deux (peut-être les deux) de ces formules sont fausses. “|” correspond donc, comme signe du langage-objet, à la relation métalinguistique de contrariété ; $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ est équivalent (sémantiquement) à $\ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$ et à $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$.

Rajoutons “|” à notre langue de la manière suivante.

Définition 4. *Soit $\mathcal{L}$ la langue définie par les définitions* (1) *et* (2)*. Nous construisons une langue $\mathcal{L}^*$ en rajoutant à* (1) *la clause*
– “ | ” (“est incompatible avec”)
et en rajoutant à (2) *la clause*
– Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi|\psi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.

Nous pouvons montrer maintenant que dans $\mathcal{L}^*$, tous les autres connecteurs sont définissable à partir de “|” :

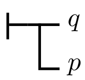
$$\begin{array}{rcl}
\ulcorner\neg\phi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\phi|\phi\urcorner \\
\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi|\psi)|(\phi|\psi)\urcorner \\
\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|\phi)|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|(\psi|\psi)) \mid ((\phi|\phi)|\psi)) \;\;|\;\; (\psi|(\phi|\phi)) \mid ((\psi|\psi)|\phi)\urcorner
\end{array}$$

Ces définitions sont ‘correctes’ dans le sens que il s'agit réellement des équivalences sémantiques ; c'est-à-dire les formules à la droite du signe de définition ont la même table de vérité que celles du côté gauche au cas où ces autres sont définies comme nous l'avons fait auparavant.[3]

4 Un peu d'histoire

La logique classique moderne, comme elle est enseignée dans ce cours, repose sur les travaux de *Gottlob Frege* (1848–1925), mathématicien et philosophe allemand de la deuxième moitié du 19ème siècle. Frege observait que les raisonnements des mathématiciens de son temps étaient 'intuitives' dans le sens qu'ils utilisaient des connecteurs 'logiques' ("donc", "il s'ensuit que", "en conséquence" etc.) pour marquer les différentes étapes de leurs raisonnements sans pour autant être capables d'en donner une justification méticuleuse. Ils sautaient, pour ainsi dire, des pas. Le problème qu'a cette méthode de 'raccourcis', bien qu'elle est certainement pratique dans l'enseignement des mathématiques et inévitable dans la vie mathématique de tous les jours, est qu'il est très difficile, lorsqu'une preuve n'aboutit pas ou un résultat paradoxal est obtenu, d'identifier l'endroit exact où le raisonnement prenait la mauvaise route et l'erreur a été fait. En insistant que les raisonnements en mathématiques devraient être sans lacunes, tels que chaque assertion s'ensuit logiquement des précédentes, Frege développait, dans son "idéographie" (Frege 1879), ce qui est considéré aujourd'hui la logique classique, propositionnelle et des prédicats.

Frege n'était pas le seul, mais le plus méticuleux, des pionniers des mathématiques modernes. L'italien Giuseppe Peano et l'américain C.S. Peirce en était d'autres. Frege utilisait une notation bidimensionnelle qui, même qu'elle ait certaines avantages, s'avérait trop compliquée par la suite. Pour une implication matérielle "$p \rightarrow q$", par exemple, Frege écrivait la formule suivante :



La formule commence par un trait vertical, appelé 'trait de jugement', qui signifie que l'implication n'est non seulement entretenue ou supposée, mais également affirmée.[4] Le trait horizontal qui suit est appelé 'trait de contenu' et indique que la formule qui suit exprime une proposition, à savoir quelque chose susceptible d'être vraie ou fausse.

[3]En fait, il suffit de montrer la définissabilité de "$\neg$" et de "$\vee$" en termes de "—". La définissabilité des autres s'ensuit alors comme suit :

$$\begin{array}{lll}
\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\
 & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(((\phi|\phi)|(\psi|\psi))|((\phi|\phi)|(\psi|\psi))) \mid (((\phi|\phi)|(\psi|\psi))|((\phi|\phi)|(\psi|\psi)))\urcorner \\
\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\
 & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi)))\urcorner \\
\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\urcorner \\
 & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\ ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \ \mid \\
 & & \quad ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \mid ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \ \ ) \ \ \mid \\
 & & (\ ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \ \mid \\
 & & \quad ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \mid ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \ \ )\urcorner
\end{array}$$

Il est clair que les équivalences non-abrégées pour l'implication et l'équivalence sont complètement illisibles et qu'une logique qui n'opérait qu'avec la barre de Sheffer serait impossible à pratiquer (et difficile à enseigner). L'important, cependant, est qu'on peut définir la négation et la conjonction à partir de " |" – la définissabilité des autres connecteurs s'ensuit, puisque tous les autres connecteurs sont eux-mêmes définissables à partir de "$\neg$" et "$\wedge$".

[4]Wittgenstein, dans le *Tractatus*, critiquait le trait de jugement comme introduisant un élément étranger au formalisme : la logique, d'après lui, ne s'occupe point de la question à savoir si ses propositions dont elles traite sont affirmées ou non. A propos de l'argument de Frege, que le trait de jugement est nécessaire pour distinguer le discours qui cherche à découvrir des vérités (y inclut les vérités logiques) du discours tenu sur stage, Wittgenstein remarquait que les acteurs, pour convaincre leur public, certainement utiliseraient également le trait de jugement.

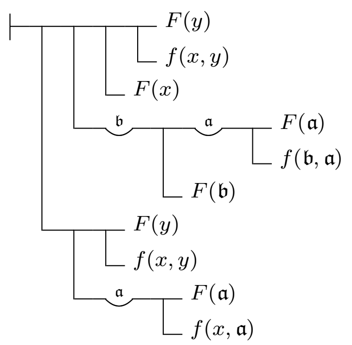
A part de la notation bidimensionnelle de Frege,[5] il y a la notation 'algébrique' de George Boole (où la négation "$\neg p$" est exprimée par une barre "$\bar{p}$") et la notation dite 'polonaise' de Jan Łukasiewicz, qui permet de supprimer toute ponctuation sans risquer l'équivoque.[6] Aujourd'hui on utilise généralement un mélange de la notation de Peano (qui avait un simple point "." pour la conjonction) et celle des logiciens et philosophes anglais Bertrand Russell et Alfred North Whitehead (qui avaient "$\supset$" pour l'implication matérielle et "$\equiv$" pour l'équivalence matérielle ; la flèche "$\rightarrow$" vient de Hilbert).

Même si Frege a été le premier à sortir la logique du dogmatisme aristotélicienne et à la libérer du paradigme stérile de la syllogistique qui l'avait dominée pour plus de 2000 ans,[7] ses travaux n'étaient pas appréciés pendant sa vie. Ce n'était que l'oeuvre volumineux *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead (Whitehead & Russell 1910) qui mettait sa contribution en lumière.

Le développement d'une logique qui était capable de formaliser les raisonnements des mathématiciens permettait l'axiomatisation de l'arithmétique (cf. Frege (1884) et Dedekind (1888), mais surtout les deux volumes des "Lois fondamentales", Frege (1893) et Frege (1903)). Ce qui était jusqu'à la fin du 19ème siècle une étude de certaines entités élusives qu'on appelait des 'nombres' devenait alors une science, fondée sur une base solide. Il était finalement possible de donner des réponses à des questions aussi fondamentales comme "qu'est-ce qu'est un nombre ?", "sous quelles conditions dénotent "n" (p.ex. : "2+2") et "m" (p.ex. : "4") le même nombre ?", "en quel sens font les nombres naturels partie des nombres rationnels ?" etc.

Frege avait une motivation philosophique pour son projet de mettre les mathématiques sur une base logique, de dériver les théorèmes mathématiques des axiomes purement logiques par des preuves qui suivent des règles d'inférence logiques : il voulait montrer, contre Kant, que les propositions mathématiques n'étaient pas synthétiques (que les mathématiques ne dérivent pas, comme le pensait Kant, leurs connaissances de de la construction des concepts, c'est-à-dire de l'intuition qui peut être donnée *a priori* (d'une manière indépendante de la perception) comme correspondante aux concepts), mais qu'elles étaient aussi analytiques (et a priori) que les lois logiques. Cette position en philosophie des mathématiques, qui conçoit les mathématiques comme partie ou

[5] Pour un exemple plus compliqué de la logique des prédicats (théorème 71 de la *Begriffsschrift*) :



Dans notre notation (future), ceci est équivalent à la formule suivante :

$$(\forall a(f(x,a) \rightarrow F(a)) \rightarrow (f(x,y) \rightarrow F(y))) \quad \rightarrow \quad (\forall b(F(b) \rightarrow \forall a(f(b,a) \rightarrow F(a))) \rightarrow (F(x) \rightarrow (f(x,y) \rightarrow F(y))))$$

[6] Dans la notation polonaise, les connecteurs sont représentés par des lettres qui précèdent immédiatement ce sur quoi il portent. L'opérateur principal est donc toujours placé en tête. Si "N" représente la négation, "A" la disjonction, "K" la conjonction et "C" l'implication, "$\neg p \vee q$" devient "$ANpq$", "$\neg(p \vee q)$" devient "$NApq$", "$((p \vee q) \wedge \neg r) \rightarrow \neg(p \vee q)$" devient "$CKCApqrNrNApq$" (ce qui se 'décompose' en "$C(K(C(Apq)r)Nr)(N(Apq))$" sans univoque) etc.

[7] Frege avait, bien sûr, des prédécesseurs, notamment les deux mathématiciens anglais, Boole et de Morgan. De Morgan a été le premier à remarquer que la logique d'Aristote était incapable de justifier des inférences basées sur des propriétés de relations (par exemple l'inférence de "Sam aime Marie" à "Sam aime quelqu'un" et à "Marie est aimée par quelqu'un") et en a développé une logique. S'inspirant du raisonnement algébrique, Boole a classifié les connecteurs propositionnels d'après leur effets sur des classes. Cette "algèbre de la logique" sera perfectionnée par Jevons, Venn, Schröder et Whitehead.

réductible à la logique, a reçu le nom de '*logicisme*'.

C'était dans le premier volume des *Grundgesetze* ('lois fondamentales de l'arithmétique') de Frege (Frege 1893) que Bertrand Russell a découvert ce qu'on appelle aujourd'hui le 'paradoxe de Russell'. Russell, dans une lettre écrite à Frege en 1902, a remarqué que les axiomes Frege avait donnés pour l'arithmétique permettaient la formation de l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Il en dérivait une contradiction, montrant ainsi que les axiomes de Frege ne pouvaient pas tous être vrais.

Un ensemble tel que $\{x \mid x$ est un nombre naturel $\}$ ou $\{x \mid x$ est une vache suisse $\}$ ne se contient pas lui-même, puisque un ensemble n'est pas un nombre ni une vache suisse. Un ensemble tel que $\{x \mid x$ est un ensemble $\}$, cependant, *est* un membre de soi-même. Pour dériver le paradoxe, construisons maintenant l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes et l'appelons "a" :

$$a \ := \ \{x \mid x \notin x\}$$

Nous pouvons maintenant formuler la question à savoir si a se contient soi-même, c'est-à-dire si $a \in a$. Aucune réponse cohérente à cette question peut être donnée :

R1 Si a se contient soi-même ($a \in a$), alors a satisfait la condition qui définit cet ensemble : alors a est un des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes (c'est-à-dire, a est un ensemble x tel que $x \notin x$). Alors il ne se contient pas soi-même.

R2 Si, de l'autre côté, a ne se contient pas soi-même ($a \notin a$), alors a satisfait la condition de ne pas se contenir soi-même (c'est-à-dire a est un x tel que $x \notin x$) ; comme cette condition définit quels ensembles appartiennent à a, alors a se contient soi-même.

On a donc une preuve de l'assertion suivante :

$$a \in a \Longleftrightarrow a \notin a \tag{1}$$

a se contient soi-même si (R1) et seulement si (R2) a ne se contient pas soi-même. Ceci est une contradiction. On peut donc inférer, par une réduction à l'absurde, qu'au moins une des prémisses desquels la contradiction a été inférée doit être fausse. Comme ces prémisses étaient les axiomes du système de Frege, la contradiction montrait que ces axiomes ne pourraient pas tous être vrais. Frege était détruit par cette découverte de Russell ; il essayait de réparer son système dans le deuxième volume des *Grundgesetze* (Frege 1903), mais ses changements ont vite été montrés inadéquats. Il abandonnait donc son logicisme et en était déprimé jusqu'à sa mort.[8]

La conclusion qu'on tirait généralement du paradoxe de Russell était que certains ensembles sont trop 'grands' pour pouvoir dits appartenir à d'autres ensembles : pas tous les ensembles sont éligibles pour membre d'autres ensembles. La théorie des ensembles, développée à la fin du 19ème siècle par le mathématicien Georg Cantor (Cantor 1883a), a dû reconnaître ce qu'on appelle des 'classes propres', c'est-à-dire des entités qui, comme les ensembles ordinaires, contiennent des membres, mais qui ne peuvent pas eux-mêmes être membres d'autres ensembles. Mais comment les exclure ?

Russell et Whitehead, dans les *Principia Mathematica*, développaient ce qu'on appelle une théorie des types. D'une manière analogue à la distinction entre langage-objet et métalangage, ils attribuaient à chaque expression un 'type' de la manière suivante : Les choses qui ne sont pas des ensembles sont du type 0, les ensembles qui ne contiennent que des choses qui ne sont pas des ensembles sont du type 1, les ensembles qui ne contiennent des entités du type 0 et 1 sont du type 2 etc. Ils stipulaient qu'une expression de la forme "$x \in y$" n'est bien formée qu'à condition que l'entité dénotée par "x" soit d'un type inférieur au type de l'entité dénotée par "y".

[8]Il y avait, dans les vingt dernières années, des tentatives de réanimer le logicisme, en développant un système plus faible que celui de Frege mais qui est censé mériter toujours d'être considéré un système logique (cf. Wright 1983; Hale & Wright 2001).

Un autre approche était l'approche axiomatique. Le mathématicien Ernst Zermelo (1908) formulait des axiomes pour la théorie des ensembles qui étaient d'une sorte qu'on ne pouvait pas en construire le paradoxe de Russell. Il était donc possible de remplacer à la notion intuitive d''ensemble' (une sorte de collection d'objets où on fait abstraction de tout ce qui leur est particulier) par une définition rigoureuse : on appelle "ensemble" tout ce qui satisfait les axiomes d'une certaine théorie Th, appelée "théorie des ensembles". La notion intuitive (et 'sémantique') était donc remplacée par une notion purement structuraliste ('syntaxique').[9] Également impressionné par le fait que Frege avait développé une notion purement syntaxique d'une preuve, dont la correction peut être vérifiée mécaniquement, le mathématicien allemand David Hilbert fondait une école en la philosophie des mathématiques qu'on appelle aujourd'hui le *formalisme*. Le formaliste considère les mathématiques et la logique comme des manières de manipuler des symboles en suivant certaines règles. Au lieu d'être des sciences d'une réalité abstraite et éternelle, les mathématiques et la logique sont pris pour des activités linguistiques.

Le formalisme était fortement influencé par le développement de différentes géométries. Kant pensait que la géométrie euclidienne était la science de l'espace et qu'elle informait, d'une manière a priori, tous nos jugements spatiaux. Et il est en fait tentant en géométrie de se conforter à l'observation, et le 5ème axiome d'Euclide : "Par un point, il passe une parallèle à une autre droite et une seule" semblait évident. Pourtant, au cours du XIXème siècle, Lobachevsky notamment avait réussi à construire des géométries ne respectant pas cet axiome. On découvrait qu'à part de la géométrie Euclidienne, il existaient d'autres systèmes d'axiomes, non équivalents mais qui traitaient également des notions 'géométriques' comme "point", "ligne", "parallèle" etc. Comme ces systèmes d'axiomes étaient également consistants, la question se posait à savoir si ces différentes systèmes étaient des théories rivales portant sur le même domaine, en donnant une description ou bien vraie ou bien fausse ou s'il s'agissait plutôt de différentes langages qui définissent leurs notion d'une manière implicite et ne se trouvent point en désaccord entre eux. Les formalistes ont pris la deuxième voie et se décidaient de voir les mathématiques comme construction de systèmes formels qui lui-même définissent le domaine duquel ils parlent. Hilbert défendait la position selon laquelle il n'y a pas de contenu intuitif à "point", "ligne", "parallèle" etc. à part des significations que les définitions purement structuralistes de ces termes à l'intérieur d'une géométrie axiomatique (cf. Hilbert 1899) leurs attribuaient.

Hilbert fondait la discipline des métamathématiques, une science qui utilise les outils et les méthodes de la logique et des mathématiques ordinaires pour parler de (et non pas avec) des systèmes formels. Au lieu de développer telle et telle axiomatisation d'un domaine mathématiques (comme la logique propositionnelle, des prédicats, l'arithmétique ou la géométrie), les métamathématiques étudient de tels axiomatisations et essayent d'en établir des propriétés telle que la consistance, la complétude, la décidabilité etc. Ce programme, cependant, a reçu un coup fort avec l'annonce d'une découverte historique du jeune logicien autrichien Kurt Gödel qui, en 1931, démontrait l'incomplétude de l'arithmétique (Gödel 1931). Gödel démontrait que tout système formel consistant, et susceptible de formaliser en son sein l'arithmétique des entiers, est incomplet, c'est-à-dire permet la formulation d'une formule qui – d'après le système – exprime une proposition vraie mais qui ne peut pas être démontrée dans ce système. On parlera de cette découverte plus tard.

Un grand problème, lié au paradoxe de Russell, était les 'paradoxes sémantiques' et en particulier le 'paradoxe du menteur' qui est le problème soulevé par la phrase suivante :

(**M**) est une phrase fausse. (**M**)

[9] Pour mieux comprendre l'approche 'structuraliste', considérons les axiomes de Peano pour l'arithmétique qui stipulent, en gros, que les nombres naturels constituent une 'progression' : 0 est un nombre naturel, et tout 'nombre successeur' ("+1") d'un nombre naturel est un nombre naturel. Le problème avec ces axiomes est qu'à part de la série que nous reconnaissons intuitivement comme celle des nombres naturels, à savoir $\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$, beaucoup d'autres 'progressions' les satisfont, par ex. les nombres paires $\langle 0, 2, 4, 6, \ldots \rangle$. Dans ce cas, un structuraliste défendrait la position selon laquelle nous n'avons aucune raison d'attribuer le nom de "nombres naturels" à la première 'progression' et non pas à la deuxième.

Si (**M**) est vraie, alors elle est ce qu'elle dit, alors elle est fausse. Si (**M**) est fausse, de l'autre côté, elle est ce qu'elle dit, alors elle vraie. On a donc une preuve de la contradiction suivante :

$$(\mathbf{M}) \text{ est vraie} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{M}) \text{ est fausse.}$$

Il semblait donc qu'un prédicat aussi fondamental que "...est vrai" est contradictoire. En 1936, le logicien et méta-mathématicien Alfred Tarski, issu de la fameuse école polonaise en logique (Twardowski, Łukasiewicz, Adjukiewicz, Kotarbiński, Leśniewski), arrivait à donner une définition non-contradictoire de "...est vrai", distinguent entre langage-objet et métalangage (Tarski 1936). C'était le début de la sémantique systématique.

Outre le logicisme de Frege et le formalisme de Hilbert, une troisième tradition dans la philosophie des mathématiques émergeait au début du 20ème siècle, à savoir l'*intuitionnisme* du logicien hollandais Luitzen Egbertus Jan Brouwer (cf. Brouwer 1918). Brouwer et son étudiant Arendt Heyting (cf. Heyting 1956) adhéraient à une philosophie constructiviste qui rejetait les preuve non-constructives et le tiers-exclu. Ces cibles étaient liés. Un exemple d'une preuve non-constructive est une preuve qui démontre une disjonction "$\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$" sans pour autant montrer lequel des disjoints est vrai.[10] Ce rejet était justifié par leur interprétation de la disjonction : prouver que $p \vee q$, pour les intuitionnistes, veut dire prouver ou bien que p ou bien que q ; prouver que $\neg p$, c'est prouver qu'on ne peut pas prouver que p. C'est pour cela qu'ils rejettent le tiers exclu : il y a beaucoup de cas où on n'arrive ni à prouver que p ni qu'à prouver que $\neg p$. L'école des intuitionnistes a développé sa propre logique, dans laquelle "$\ulcorner \phi \vee \neg\phi \urcorner$" n'est pas un théorème.

La distinction entre la syntaxe et la sémantique et le développement des notions purement syntaxiques des systèmes axiomatiques, des preuves et des calculs étaient donc au centre de cette grande renaissance que la logique et les mathématiques ont connu entre 1879 et 1931. Il est donc important que nous nous en fassions une idée et développons une notion syntaxique de preuve.

5 Ce qu'est un calcul

Si on entend par 'logique' un ensemble de propositions considérées valides (par rapport à cette logique) ou une relation de conséquence sémantique particulière, un calcul est un système formel qui *axiomatise* cet ensemble de propositions ou cette relation de conséquence. Une telle axiomatisation consiste en la différentiation de deux types de propositions : d'*axiomes* et de *théorèmes* – étant tels que les théorèmes s'ensuivent ou peuvent être déduits des axiomes. Les axiomes forment le noyau de la formalisation ; typiquement, ils postulent que la relation de conséquence ait quelques propriétés particulières. Les théorèmes nous permettent d'évaluer la qualité d'une axiomatisation

[10] Une telle preuve est la suivante :

Théorème 5. *Il y a des nombres transcendants (= non-rationnels) a et b tels que a^b est rationnel.*

Preuve Considérons le nombre réel $p := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ou bien il est le cas que $p \in \mathbb{Q}$ ou bien il est le cas que $p \notin \mathbb{Q}$.

1. $p \in \mathbb{Q}$. Alors on met $a := \sqrt{2}$ et $b := \sqrt{2}$, comme $\sqrt{2}$ est transcendant.
2. $p \notin \mathbb{Q}$. Alors on met $a := p$ et $b := \sqrt{2}$, comme p et $\sqrt{2}$ sont transcendants. En plus, en a :

$$a^b := (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$\square$

Cette preuve ne nous fournit pas des nombres transcendants spécifiques a et b tels que a^b est rationnel. Elle montre qu'il doit y avoir, sans pour autant nous fournir quelques-uns.

particulière ; ils sont des propositions dérivées du calcul à l'aide des règles d'inférence permises dans ce calcul.

Le calcul, lui aussi, n'est rien d'autre qu'un ensemble de propositions ; c'est une entité purement syntaxique, comme une langue, et comme une langue il est construit à l'aide d'une définition récursive – sauf qu'il ne s'agit pas d'une définition de "formule bien formée", mais d'une définition de "théorème". Les axiomes correspondent aux propositions atomiques (= la 'base' de la récursion) et les théorèmes aux formules bien formées :

Définition 6. *Un* calcul *est un ensemble de formules propositionnelles déterminé par un ensemble de formules propositionnelles qui sont appelées les '*axiomes*' et des règles d'inférence. Un élément de cet ensemble est appelé un '*théorème*'. Ce qu'est un théorème est déterminé par la définition récursive suivante :*

1. *Tout axiome est un théorème.*
2. *Une formule propositionnelle qu'on obtient en appliquant une règle d'inférence à des théorèmes est un théorème.*
3. *Rien d'autre n'est un théorème.*

On peut dire qu'un calcul est un ensemble de formules généré par les règles d'inférence sur la base des axiomes. Les règles d'inférence sont des schémas d'inférences ayant la forme suivante :

$$\frac{\phi, \psi, \chi, \ldots}{\xi} \tag{2}$$

Les formules ϕ, ψ, χ, ...sont appelées les '*prémisses*' de la règle d'inférence, la formule ξ sa '*conclusion*'. Il n'est pas requis, à ce stade, que ces règles d'inférence soient valides ou que ses prémisses soient vraies. Il s'agit d'une pure manipulation de symboles.[11] Une règle d'inférence nous permet de 'générer' des théorèmes à partir des axiomes : dire que (2), par exemple, est une règle d'inférence d'un certain calcul, est de dire que toute formule ξ qu'on obtient en remplaçant ϕ, ψ et χ par des théorèmes du calcul est un théorème.

Pour dire qu'une formule propositionnelle ϕ est un théorème d'un calcul particulier HC, nous écrivons "$\mathsf{HC} \vdash \phi$". "$\vdash$", on l'a dit, représente la relation de *déductibilité* : "$\mathsf{HC} \vdash \phi$" veut dire que ϕ peut être déduite des axiomes du calcul HC – c'est à dire qu'il y a une preuve, dans HC, dont ϕ est la conclusion. Mais qu'est-ce que nous entendons par cette notion de 'preuve' ?

6 * La notion de 'preuve'

La plus importante notion syntaxique en logique est celle d'une *preuve*. C'était en clarifiant ce qu'est une preuve que Frege faisait sa contribution la plus importante au développement moderne des mathématiques et de la logique. Une preuve est une séquence de formules bien formées qui satisfait quelques critères purement syntaxiques.

Une preuve est relative à un certain calcul. Une séquence de formules propositionnelles est une preuve d'un certain calcul si elle consiste en des formules qui sont (i) ou bien des axiomes ou (ii) peuvent être obtenues en appliquant une règle d'inférence à des formules qui la précèdent dans la séquence qui est la preuve. On voit pourquoi "$\mathsf{HC} \vdash \phi$" veut dire qu'il y a une preuve, dans HC, dont ϕ est la conclusion : par cette séquence qui est la preuve et dont ϕ est le dernier nombre, on prouve que ϕ s'ensuit des axiomes de HC par les règles d'inférence propres à HC.

On ne peut non seulement inférer ou déduire des propositions d'un calcul, mais aussi d'une théorie (qui peut être conçue comme un calcul qui n'a pas de règles d'inférence et qui ne consiste donc

[11] Pour que le calcul soit *correct* par rapport à une sémantique particulière, cependant, il est requis que les axiomes soient des tautologies et les règles d'inférence valides. Nous reviendrons à la question de correction plus tard.

que d'axiomes). ϕ peut être inférée d'une théorie Th relatif à un calcul HC si on peut construire, en appliquant des règles d'inférence de HC aux membres de Th et des axiomes de HC, une preuve qui a ϕ comme conclusion. Nous avons donc comme notre définition officielle d'une preuve :

Définition 7. *Une* preuve*, dans un calcul* HC *et à partir d'une théorie* Th*, est une séquence finie de propositions* $\langle \phi_1, \ldots \phi_n \rangle$ *telle qu'on a, pour tout* i*,* $1 \leq i \leq n$*,* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \cup \{\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$*.*

Comme la théorie Th en considération peut être vide, nous avons du même coup une définition d'une preuve dans un certain calcul HC *tout court*.

Il est important de noter qu'une preuve est toujours une séquence de formules *finie* – une preuve c'est quelque chose qu'un logicien ou mathématicien ou philosophe peut produire en principe, c'est-à-dire une preuve doit être humainement possible et est donc toujours finie.

Nous devons maintenant encore définir ce que nous voulons dire par le signe "$\vdash$" et définir la relation de déductibilité qu'il représente :

Définition 8. *Si* HC *est un calcul,* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle, nous définissons "*$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$*" (*$n \in \mathbb{N}$*) pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par induction sur* n *:*

1. *Si* ϕ *est un axiome de* HC*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
2. *Si* ϕ *est un membre de* Th*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
3. *Si* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ *et* $m_i < n$ *pour toutes les prémisses* ψ_i *d'une règle d'inférence de* HC*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour la conclusion* ϕ *de cette règle d'inférence.*

Le nombre n dans "$\vdash^n$" nous indique la longueur de la preuve. "$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$" veut dire qu'il existe, dans HC et à partir de Th, une preuve de longueur n pour ϕ. Nous écrivons "$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi$" pour dire qu'il y a un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ (il y a une preuve d'une certaine longueur). Les deux premières conditions veulent dire en particulier que les axiomes peuvent être déduits de HC (et les éléments de Th peuvent être déduits de $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th}$) par une preuve 'de longueur 0'.

Voici un exemple : $\langle p \to q, p, q \rangle$ est une preuve relative à une théorie qui contient "$p \to q$" et "p" et un calcul HC qui reconnaît *modus ponens* comme règle d'inférence :

$$\mathsf{HC} \cup \{p \to q, p\} \vdash^0 p \to q$$
$$\mathsf{HC} \cup \{p \to q, p\} \vdash^1 p$$
$$\mathsf{HC} \cup \{p \to q, p\} \vdash^2 q$$

On a utilisé dans cette définition de $\ulcorner \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi \urcorner$ en métamathématiques (ou méta-logique) une procédure de preuve très commune en mathématiques, à savoir l'induction. Une preuve par induction profite du fait que les nombres naturels $\mathbb{N}$ forment une progression : on prouve, par induction, que tout nombre $n \in \mathbb{N}$ a une certaine propriété F en montrant que le nombre 0 a cette propriété et que, si un nombre n l'a, alors son 'successeur' $n+1$ l'a aussi. On a donc montré par les deux premières condition que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^0 \phi$ si ϕ est un axiome ou un membre de Th et que si on a $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \psi_i$ pour toutes les prémisses ψ_i d'une inférence valide, on a $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ pour sa conclusion ϕ.

On voit que les notions de 'calcul', 'axiome', 'théorème' et 'preuve' sont des notions purement syntaxiques : il s'appliquent à des formules propositionnelles purement en vertu de leur forme et indépendamment de leur signification ou valeur de vérité.

7 * Un calcul hilbertien pour la logique propositionnelle

Nous allons maintenant considérer une axiomatisation particulière de la logique propositionnelle. Cette axiomatisation consiste en une infinité d'axiomes – heureusement, beaucoup des axiomes sont de la même forme. C'est pourquoi nous donnons les axiomes comme schémas : ceci veut dire que toutes les formules propositionnelles de $\mathcal{L}$ qui ont la même forme que les formules qu'on énumère dans la suite sont des axiomes de notre calcul HC.

Il y a plusieurs calculs équivalents pour la logique des propositions.[12] Celui que nous donnerons par la suite est ni le plus court ni le plus jolie, mais à mon opinion un des plus pratiques pour faire des preuves :

Définition 9. *Le calcul* HC *est déterminé par toutes les formules de* $\mathcal{L}$ *qui ont la forme d'un des axiomes suivantes :*

$\mathbf{H_1}$	$\ulcorner\phi \to \phi\urcorner$	*réflexivité*
$\mathbf{H_2}$	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))\urcorner$	*transitivité*
$\mathbf{H_3}$	$\ulcorner((\phi \wedge \psi) \to \chi) \to (\phi \to (\psi \to \chi))\urcorner$	*conditionaliser l'antécédent*
$\mathbf{H_4}$	$\ulcorner(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \wedge \psi) \to \chi)\urcorner$	*augmenter l'antécédent*
$\mathbf{H_5}$	$\ulcorner\phi \to (\phi \vee \psi)\urcorner$	*introduire "$\vee$" à droite*
$\mathbf{H_6}$	$\ulcorner\psi \to (\phi \vee \psi)\urcorner$	*introduire "$\vee$" à gauche*
$\mathbf{H_7}$	$\ulcorner(\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\phi \vee \psi) \to \chi)))\urcorner$	*alternative*
$\mathbf{H_8}$	$\ulcorner(\phi \wedge \psi) \to \phi\urcorner$	*élimination "$\wedge$" à droite*
$\mathbf{H_9}$	$\ulcorner(\phi \wedge \psi) \to \psi\urcorner$	*élimination "$\wedge$" à gauche*
$\mathbf{H_{10}}$	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to (\psi \wedge \chi)))\urcorner$	*composition*
$\mathbf{H_{11}}$	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)\urcorner$	*conversion*
$\mathbf{H_{12}}$	$\ulcorner\phi \to (\neg\phi \to \psi)\urcorner$	*ex falso quodlibet*
$\mathbf{H_{13}}$	$\ulcorner(\phi \to (\phi \wedge \neg\phi)) \to \neg\phi\urcorner$	*reductio ad absurdum*
$\mathbf{H_{14}}$	$\ulcorner((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)) \to (\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$	*introduction "$\leftrightarrow$"*
$\mathbf{H_{15}}$	$\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi) \to ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))\urcorner$	*élimination "$\leftrightarrow$"*
$\mathbf{H_{16}}$	$\ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$	*tautologie*

La seule règle d'inférence de HC *est modus ponens* MP *:* $\dfrac{\phi, \ulcorner\phi \to \psi\urcorner}{\psi}$.

MP signifie : si une implication matérielle $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ et son antécédent ϕ ont été prouvés, alors le

[12] Frege, en 1879, était le premier à axiomatiser la logique propositionnelle et à donner des règles formelles d'inférence. En suite, Bertrand Russell a développé plusieurs calculs. Dans son article "The theory of implication" (Russell 1906), il a donné les suivants :

1	$\ulcorner\phi \to \phi\urcorner$
2	$\ulcorner\phi \to (\psi \to \psi)\urcorner$
3	$\ulcorner(\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))\urcorner$
4	$\ulcorner(\phi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\phi \to \chi))\urcorner$
5	$\ulcorner(\neg\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \phi)\urcorner$
6	$\ulcorner(\phi \to \neg\phi) \to \neg\phi\urcorner$
7	$\ulcorner(\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\phi)\urcorner$

Dans les *Principia Mathematica*, Whitehead et lui ont proposé les axiomes suivants :

1	$\ulcorner(\phi \vee \phi) \to \phi\urcorner$
2	$\ulcorner\psi \to (\phi \vee \psi)\urcorner$
3	$\ulcorner(\phi \vee \psi) \to (\psi \vee \phi)\urcorner$
4	$\ulcorner(\phi \vee (\psi \vee \chi)) \to (\psi \vee (\phi \vee \chi))\urcorner$
5	$\ulcorner(\psi \to \chi) \to ((\phi \vee \psi) \to (\phi \vee \chi))\urcorner$

Hilbert et Ackermann ont montré que l'axiome 4 n'était pas indépendant (c'est-à-dire qu'il pouvait être déduit des autres). Encore un autre système axiomatique est celui de Łukasiewicz :

1	$\ulcorner(\phi \vee \phi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))\urcorner$
2	$\ulcorner\phi \to (\neg\phi \vee \psi)\urcorner$
3	$\ulcorner(\neg\phi \to \phi) \to \phi\urcorner$

On voit alors qu'il est parfaitement possible que quelque chose qui soit un théorème dans un calcul est un axiome dans un autre.

conséquent ψ de cette implication matérielle peut aussi être considéré comme prouvé.

Le fait que ces axiomes sont des schémas veut dire que toute proposition qui peut être dénoté par un des noms complexes donnés est un axiome du calcul : "$p \to p$", par exemple, est un axiome, parce qu'il est de la même forme que $\ulcorner \phi \to \phi \urcorner$, la proposition "$(q \wedge r) \to (q \wedge r)$" est un axiome parce qu'elle a aussi cette forme, "$(p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \to t) \to (p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \to t)$" l'est aussi et ainsi de suite.[13] On voit donc que HC a un nombre infini d'axiomes. La même chose va pour les théorèmes : "$p \leftrightarrow p$", "$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge q)$", "$(p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \to t) \leftrightarrow (p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \to t)$" sont tous des théorèmes, parce qu'ils peuvent être déduites par MP des instances des axiomes $\mathbf{H_{14}}$ et $\mathbf{H_1}$ et ainsi de suite.

L'équivalence des différentes axiomatisations de la logique des propositions signifie qu'ils ne se distinguent que par leur choix d'axiomes : ils ont la même règle d'inférence et consistent en les mêmes théorèmes. Le choix entre eux revient donc à choix pratique qui n'est pas informé par des considérations purement logiques. Le fameux logicien français Jean Nicod (c'est d'après lui que l'Institut Nicod à Paris a reçu son nom) a montré que la barre de Sheffer permet la formulation d'un calcul équivalent à HC qui n'a qu'un seule axiome, à savoir le suivant (cf. Nicod 1917–1920) :[14]

$$\ulcorner(\phi|(\psi|\chi)) \quad | \quad ((\xi|(\xi|\xi)) \mid ((\rho|\psi) \mid ((\phi|\rho)|(\phi|\rho))))\urcorner$$

Les axiomes que nous venons de donner dans notre calcul HC ne forment pas une axiomatisation minimale. Il serait possible de dériver certains de ces axiomes des autres.

8 Des preuves dans le calcul

Considérons quelques preuves dans ce calcul. Pour commencer, nous démontrons que la disjonction est commutative, c'est-à-dire que "$(p \vee q) \to (q \vee p)$" est un théorème :[15]

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (q \vee p)$	$\mathbf{H_6}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (q \vee p)$	$\mathbf{H_5}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (q \vee p)) \to ((q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p)))$	$\mathbf{H_7}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (q \to (q \vee p)) \to ((p \vee q) \to (q \vee p))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \vee q) \to (q \vee p)$	(MP) de (2) et (4)

Nous énumérons les lignes de la preuve dans la colonne gauche, pour une référence future. Dans la colonne de droite, nous indiquons ou bien le numéro du schéma d'axiomes dont la ligne est une instance ou bien la règle d'inférence utilisée et les lignes auxquelles elle a été appliquée. Dans la troisième ligne, par exemple, nous avons substitué "$q \vee p$" pour χ dans $\mathbf{H_7}$. La difficulté principale avec les preuves dans les calculs hilbertiens est de savoir quelles sont les formules qu'il faut substituer dans les schémas d'axiomes pour être ensuite capable de déduire la conclusion voulue avec MP.

Il est apparent qu'une preuve comme celle de la commutativité de la disjonction est purement formelle : il s'agit d'une manipulation de symboles qui ne fait aucune référence à leurs significations. Nous aurions pu argumenter pour la commutativité de la disjonction d'une autre manière : d'une manière sémantique, en considérant que la table de vérité donnée pour "$\vee$" était complètement symétrique et qu'on pouvait librement échanger "p" pour "q" sans aucune alteration, ou bien

[13] Une autre manière de formuler un calcul est de spécifier les axiomes utilisant des lettres schématiques "p" et "q" et d'adopter une règle d'inférence supplémentaire de *substitution* qui dit que toute résultat de substituer un schéma pour une lettre dans un axiome est un théorème.

[14] Wajsberg et Łukasiewicz ont aussi établi chacun un système d'axiomes qui ne consistait de qu'un seul, avec l'avantage supplémentaire que ceci ne contenait que quatre propositions différentes.

[15] "$\mathsf{HC} \vdash p \vee \neg p$", par exemple, est une proposition qui appartient au métalangage. Nous l'écrivons sans guillemets pour ne pas trop compliquer notre vie.

encore un argument pragmatique, en argumentant que l'usage de l'"ou" inclusif dans le langage ordinaire ne fait point de distinction entre l'ordre des disjoints.

Il n'est pas tout à fait correct, cependant, de dire que ce qu'on a prouvé par la preuve purement syntaxique était 'la commutativité de la disjonction'. Au sens restreint, tout ce qu'on a prouvé est que toute formule $\ulcorner(\phi\vee\psi) \rightarrow (\psi\vee\phi))\urcorner$ est un théorème du calcul HC. Parler d'une preuve à propos de la *disjonction*, présuppose déjà une certaine interprétation de ce signe "$\vee$", qui n'est pas forcé par le calcul, mais compatible avec lui. Tout ce que nous pouvons, jusque maintenant, dériver de HC à propos de "$\vee$" est que, quelque soit la relation signifiée par "$\vee$" (son interprétation), elle sera commutative.

Nous voyons donc qu'un calcul peut admettre de différentes interprétations. Si ce n'était que pour l'axiome $\mathbf{H_7}$, "$\vee$" pourrait aussi signifier la conjonction. Cette interprétation nous poserait des problèmes avec $\mathbf{H_5}$ et $\mathbf{H_6}$, mais rien ne nous garantit que même tous les axiomes ensembles ne permettent d'une seule interprétation. Dans un tel cas, on dirait que le calcul HC n'a pas de *modèle* unique, un modèle étant une structure mathématique (comme, par exemple, notre système de connecteurs propositionnels donné par les tables de vérité) dont nous nous servons pour interpréter un calcul purement syntaxique.

Comme le raisonnement sémantique 'par modèles' nous est souvent beaucoup plus proche que la manipulation purement syntaxique de symboles non-interprétés, les preuves dans les calculs hilbertiens deviennent assez vite assez compliqués. Pour une preuve plus compliquée, voici une démonstration que "$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$" est un théorème :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash (p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow ((p \wedge \neg p) \rightarrow q)$	$\mathbf{H_4}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge \neg p) \rightarrow q$	(MP) de (1) et (2)
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow p$	$\mathbf{H_9}$
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow \neg p$	$\mathbf{H_8}$
(6)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \wedge p) \rightarrow p) \rightarrow (((\neg p \wedge p) \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(7)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \wedge p) \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p))$	(MP) de (4) et (6)
(8)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p)$	(MP) de (5) et (7)
(9)	$\mathsf{HC} \vdash ((\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p)) \rightarrow (((p \wedge \neg p) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow q))$	$\mathbf{H_2}$
(10)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge \neg p) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow q))$	(MP) de (8) et (9)
(11)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow q)$	(MP) de (3) et (10)
(12)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q))$	$\mathbf{H_3}$
(13)	$\mathsf{HC} \vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	(MP) de (11) et (12)
(14)	$\mathsf{HC} \vdash ((q \wedge p) \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))$	$\mathbf{H_3}$
(15)	$\mathsf{HC} \vdash (q \wedge p) \rightarrow q$	$\mathbf{H_8}$
(16)	$\mathsf{HC} \vdash q \rightarrow (p \rightarrow q)$	(MP) de (14) et (15)
(17)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)))$	$\mathbf{H_7}$
(18)	$\mathsf{HC} \vdash (q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q))$	(MP) de (13) et (17)
(19)	$\mathsf{HC} \vdash (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$	(MP) de (16) et (18)

On voit dans cette preuve que beaucoup de pas intermédiaire sont nécessaires pour prouver des propositions à première vue 'triviales' comme l'équivalence entre $\ulcorner\neg\phi \vee \psi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$. Les huit premières lignes, par exemple, servent à établir la commutativité de la conjonction ; à la ligne 11 on a l'équivalent de 'ex falso quodlibet'.

9 Des preuves sur le calcul

On a vu qu'il est assez pénible de faire des preuves dans un calcul hilbertien. L'utilité principale de ces calculs ne réside donc pas dans leur application pour faire des preuves, mais dans le fait que ces preuves sont parfaitement mécaniques : pour tester que la preuve donnée pour $\ulcorner(\neg\phi \vee \psi) \rightarrow$

$(\phi \to \psi)^\urcorner$ est correcte, par exemple, il suffit de vérifier que les instances des schémas d'axiomes en sont réellement des instances et que la règle MP a été appliquée correctement – c'est un travail qu'un ordinateur peut faire et c'est donc dans la vérification de preuves par des ordinateurs que les calculs hilbertiens ont leur utilité principale.

Un autre point fort des calculs hilbertiens est qu'il est relativement simple d'établir des théorèmes métamathématiques à leur égard. Un théorème métamathématique à l'égard de HC n'est pas un théorème de HC, mais un théorème obtenu par des méthodes de preuves ordinaires en mathématique qui parle *de* HC et en établit des propriétés.

Nous pouvons, par exemple, prouver (dans le métalangage) que si HC peut prouver (dans le langage-objet) deux implications matérielles telles que le conséquent du premier est l'antécédent du deuxième, alors HC peut aussi prouver l'implication matérielle du conséquent du deuxième par l'antécédent du premier. Également, on peut prouver que s'il y a deux preuves de deux propositions, il y aura aussi une preuve de leur conjonction.

Théorème 10. *Soient ϕ, ψ, χ des formules propositionnelles :*

$$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi \quad \& \quad \mathsf{HC} \vdash \psi \to \chi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \vdash \phi \to \chi^{16} \tag{3}$$
$$\mathsf{HC} \vdash \phi \quad \& \quad \mathsf{HC} \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \vdash \phi \wedge \psi \tag{4}$$

Preuve

Preuve de (3) **:** L'antécédent de (3) signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \to \psi \qquad \mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi \to \chi$$

Supposons que $n_1 + 1 < n_2$. Ce que nous devons montrer c'est qu'il y a un nombre n_3 tel que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_3} \phi \to \chi$$

Nous avons, par $\mathbf{H_2}$, que

$$\mathsf{HC} \vdash^0 (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$$

Avec (MP), nous pouvons donc dériver de la première partie de l'antécédent :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+1} (\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)$$

De la deuxième partie de l'antécédent, nous pouvons en déduire avec (MP) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_2+1} \phi \to \chi$$

Preuve de (4) **:** L'antécédent de (4) signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \qquad \mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi$$

Supposons que $0 < n_1 + 1 < n_2$. Ce que nous devons montrer c'est qu'il y a un nombre n_3 tel que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_3} \phi \wedge \psi$$

Nous avons, par $\mathbf{H_1}$, que

$$\mathsf{HC} \vdash^0 (\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)$$

[16] Notez l'utilisation des signes "&" et "$\Longrightarrow$" qui appartiennent au métalangage.

Nous avons, par $\mathbf{H_3}$, que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} ((\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)) \to (\phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi)))$$

En appliquant (MP) à ces deux théorèmes, nous obtenons :

$$\mathsf{HC} \vdash^{1} \phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi))$$

Avec la première partie de l'antécédent, nous avons par (MP) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+1} \psi \to (\phi \wedge \psi)$$

Avec la deuxième partie, nous avons donc par (MP) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_2+1} \phi \wedge \psi$$

□

Références

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 1918. “Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten : Erster Teil : Allgemeine Mengenlehre”. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van wetenschappen te Amsterdam, 1st section* 12(5).

Cantor, Georg, 1883a. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaligkeitslehre. Eine mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig, Germany : Teubner. Traduction par William Ewald dans Ewald (1996: 878-920).

Dedekind, Richard, 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen ?*. Braunschweig, Germany : Friedr. Vieweg & Sohn. Traduction anglaise dans Ewald (1996).

Dedekind, Richard, Fraenkel, Abraham Adolf & Zermelo, Ernst (éds.), 1932. *Georg Cantor : Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin, Germany : Springer Verlag.

Ewald, William Bragg (éd.), 1996. *From Kant to Hilbert : A source book in the foundations of mathematics*. Oxford Science Publications. Oxford, England : Clarendon Press.

Feferman, Solomon, Dawson, Jr, John W., Kleene, Stephen C., Moore, Gregory H., Solovay, Robert M. & van Heijenoort, Jean (éds.), 1986. *Kurt Gödel – Collected Works vol. 1*. Oxford, England : Oxford University Press.

Frege, Gottlob, 1879. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle a.S., Germany : Louis Nebert.

Frege, Gottlob, 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik : eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau, Germany : Wilhelm Koebner.

Frege, Gottlob, 1893. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume I. Jena, Germany : Hermann Pohle.

Frege, Gottlob, 1903. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume II. Jena, Germany : Hermann Pohle.

Gödel, Kurt, 1931. “Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I”. *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 :173–198. Traduction anglaise dans van Heijenoort (1967: 596–616) ; republié dans Feferman et al. (1986).

Hale, Bob & Wright, Crispin, 2001. *The Reasons Proper Study*. Oxford, England : Oxford University Press.

Heyting, Arend, 1956. *Intuitionism : An Introduction*. Amsterdam, Holland : North-Holland Publishing Co.

Hilbert, David, 1899. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig, Germany : Teubner.

Nicod, Jean, 1917–1920. "A Reduction in the Number of Primitive Propositions of Logic". *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 19 :32–44.

Russell, Bertrand Arthur William, 1906. "The Theory of Implication". *American Journal of Mathematics* 28 :159–202.

Sheffer, H.M., 1913. "A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras". *Transactions of the American Mathematical Society* 14 :481–488.

Tarski, Alfred, 1936. "Der Wahrheitsbegriff in den formalizierten Sprachen". *Studia Philosophica* 1 :261–405.

van Heijenoort, Jan (éd.), 1967. *From Frege to Gödel : A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press.

Whitehead, Alfred North & Russell, Bertrand Arthur William, 1910. *Principia mathematica*. Cambridge, England : Cambridge University Press. 3 volumes, 1910, 1912, 1913.

Wright, Crispin, 1983. *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen : Aberdeen University Press. ISBN 80303528.

Zermelo, Ernst, 1908. "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I". *Mathematische Annalen* 65 :261–181. traduit dans van Heijenoort (1967: 199–215).