Cinquième leçon

Cours d'introduction à la logique et la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Philipp Keller

A lire pour le cours du 2 décembre 2003

1 * La sémantique de la logique propositionnelle

Nous avons introduit une manière purement syntaxique de faire des preuves, méthode qui nous a permis de déduire des propositions à partir de quelques axiomes d'un calcul. Pour cela, nous avons fait abstraction non seulement des significations de ces propositions, mais aussi de leurs valeurs de vérité. Les propositions ainsi prouvées étaient des tautologies (ce qu'on vérifiera facilement par des tables de vérité). On se demande donc quelle est la relation entre la méthode des tables de vérité qui nous permet de vérifier si une proposition donnée est une tautologie et la méthode des calculs hilbertiens qui nous permet de dériver, à l'aide de MP, des théorèmes à partir des axiomes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$. Cependant, pour pouvoir répondre à cette question, nous devons introduire une sémantique rigoureuse pour le langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle, dont on a défini la syntaxe dans la dernière leçon.

Comme la logique propositionnelle obéit au principe de vérifonctionnalité, sa sémantique nous permet d'attribuer des valeurs de vérité, $\mathbf{v}$ ("vrai") ou $\mathbf{f}$ ("faux"), à des formules complexes sur la base des valeurs de vérité des propositions atomiques dont elles sont composées.[1]

Définition 1. *Une* interprétation propositionnelle atomique I^* *est une fonction qui assigne à toute proposition atomique "p_i", $i \in \mathbb{N}$, une des valeurs de vérité* $\mathbf{v}$ *ou* $\mathbf{f}$ *:* $I^* : \{\text{“}p_i\text{”} \mid i \in \mathbb{N}\} \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$.

La définition générale nous montre comment étendre, par des clauses récursives, une telle interprétation propositionnelle atomique à une interprétation (attribution de valeur de vérité) de toutes les formules de notre langage :

Définition 2. *Étant donné une interprétation propositionnelle atomique I^*, nous définissons une* interprétation propositionnelle I *(qui est une fonction associant à toute formule propositionnelle une et une seule valeur de vérité :* $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$*) par les clauses récursives suivantes :*

I1 *Si ϕ est une proposition atomique,* $I(\phi) := I^*(\text{“}p\text{”})$

I2 $I(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I4 $I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

[1] J'utilise "$\mathbf{v}$" et "$\mathbf{f}$" pour indiquer qu'on traite ici les valeurs de vérité comme des 'objets'. L'utilisation de "V" et "F" dans les tables de vérité, par contre, pourrait être paraphrasée de manière à ne pas 'réifier' les valeurs de vérité. Au lieu de dire, par exemple, que "$p \to q$" reçoit"F" comme sa valeur de vérité dans la deuxième ligne de la table de vérité pour cette proposition complexe, on pourrait dire que la proposition est fausse si son antécédent est vrai et son conséquent faux.

I5 $I(\phi \to \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \ \textit{ou} \ I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \ \textit{et} \ I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$

On reconnaît, dans la spécification de cette fonction I, le même raisonnement qui nous a permis de définir les connecteurs par des tables de vérité. Une interprétation particulière correspond à une possibilité logique et à une ligne dans une table de vérité. Une interprétation atomique I^* qui attribue **v** à "p", "q" et "r" et **f** à "s" et "t" ($I^*(\text{“}p\text{”}) = I^*(\text{“}q\text{”}) = I^*(\text{“}r\text{”}) = \mathbf{v}$ & $I^*(\text{“}s\text{”}) = I^*(\text{“}t\text{”}) = \mathbf{f}$), par exemple, nous donnera une interprétation I qui attribuera **v** à "$p \wedge q$", à "$p \vee s$" etc. et **f** à "$p \to s$", "$t \vee s$" etc. Elle correspond à une possibilité logique dans laquelle "p", "q" et "r" sont vraies et "s" et "t" sont fausses. Elle correspond aussi à la quatrième ligne dans la table de vérité de ces cinq propositions (qui comporte, au total, 32 lignes) : V-V-V-F-F.

Si une proposition "p" reçoit la valeur **v** sous une interprétation I, nous pouvons dire que cette interprétation (ou la possibilité logique qu'elle représente) nous donne un *modèle* de cette proposition : elle nous montre comment le monde pourrait être si "p" était vraie. La *théorie des modèles* est cette branche de la sémantique formelle qui étudie les interprétations d'un système formel.

Comme une interprétation correspond à une possibilité logique et vice versa, on arrive également à une définition de ce qu'est une tautologie et une contradiction :

Définition 3. *Une formule propositionnelle ϕ est une* tautologie *si et seulement si elle est vraie sous toutes les interprétations. ϕ est une* contradiction *si et seulement si elle n'est vraie sous aucune interprétation (et est donc fausse sous toutes les interprétations).*[2]

Un concept métalinguistique important est celui de 'consistance' : dire qu'une formule est consistante revient à dire qu'elle n'est pas une contradiction ; dire que deux formules sont consistantes revient à dire qu'elles ne sont pas contraires, c'est-à-dire qu'elles peuvent être vraies ensemble :

Définition 4. *Une théorie* Th *est* consistante *s'il y a et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles $\phi \in \mathsf{Th}$. Autrement, elle est* inconsistante *(c'est-à-dire si et seulement si aucune interprétation ne rend vraies toutes les formules propositionnelles $\phi \in \mathsf{Th}$).*

La consistance est une relation entre des (ensembles de) propositions : on dit qu'une proposition ϕ est consistante avec deux autres propositions, ψ et χ, s'il y a et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies les trois propositions ϕ, ψ et χ. La consistance est intimement liée à la relation de conséquence sémantique : une proposition ϕ est une conséquence sémantique d'une théorie Th si et seulement si sa négation $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ est inconsistante avec Th. Dans ce cas, toute interprétation qui rend vraie $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ (et qui donc rend fausse ϕ), doit aussi rendre fausse au moins une des prémisses dans Th.

Définition 5. *Une formule propositionnelle ϕ est une* conséquence *(sémantique) d'une théorie* Th *(écrit : "$\mathsf{Th} \models \phi$") si et seulement si toute interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles dans* Th *rend vrai ϕ.*[3]

---

[2]Voici une manière formelle d'écrire cela :

$$\phi \text{ est une tautologie} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall I \ (I(\phi) = \mathbf{v}) \tag{1}$$

$$\phi \text{ est une contradiction} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall I \ (I(\phi) = \mathbf{f}) \tag{2}$$

[3]Voici une manière formelle d'écrire cela :

$$\mathsf{Th} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall I \ \forall \psi \in \mathsf{Th} \ \ (I(\psi) = \mathbf{v} \ \to \ I(\phi) = \mathbf{v}) \tag{3}$$

Si ϕ est une conséquence de la théorie vide ($\mathsf{Th} = \emptyset$), nous écrivons "$\models \phi$" au lieu de "$\emptyset \models \phi$". "$\models \phi$" veut donc dire que toute interprétation rend vraie ϕ, c'est-à-dire que ϕ est une tautologie.

Bien que toute tautologie (ainsi que toute formule de notre langage) soit composée d'un nombre fini de propositions simples, il y a non seulement une infinité de formules bien formées, mais également une infinité de tautologies.[4] Vu leur grande utilité pour faciliter les preuves, il convient tout de même d'en mentionner quelques-unes en particulier :

T1	$\models \ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))\urcorner$	analyse de "$\leftrightarrow$"
T2	$\models \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)\urcorner$	analyse de "$\rightarrow$"
T3	$\models \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner$	analyse de "$\rightarrow$"
T4	$\models \ulcorner\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi)\urcorner$	De Morgan
T5	$\models \ulcorner\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner$	De Morgan
T6	$\models \ulcorner(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))\urcorner$	distributivité
T7	$\models \ulcorner(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))\urcorner$	distributivité
T8	$\models \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi)\urcorner$	conversion
T9	$\models \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \neg\psi)) \leftrightarrow \neg\phi\urcorner$	réduction à l'absurde
T10	$\models \ulcorner(\phi \rightarrow \neg\phi) \leftrightarrow \neg\phi\urcorner$	réduction à l'absurde
T11	$\models \ulcorner(\neg\phi \rightarrow \phi) \leftrightarrow \phi\urcorner$	conséquence miraculeuse
T12	$\models \ulcorner\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	verum sequitur ad quodlibet
T13	$\models \ulcorner\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	ex falso sequitur quodlibet
T14	$\models \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \phi) \rightarrow \psi\urcorner$	modus ponendo ponens
T15	$\models \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\phi\urcorner$	modus tollendo tollens
T16	$\models \ulcorner(\neg(\phi \wedge \psi) \wedge \phi) \rightarrow \neg\psi\urcorner$	modus ponendo tollens
T17	$\models \ulcorner((\phi \vee \psi) \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi\urcorner$	modus tollendo ponens
T18	$\models \ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)\urcorner$	transitivité de l'implication
T19	$\models \ulcorner\phi \rightarrow \phi\urcorner$	'identité'
T20	$\models \ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$	tiers exclu
T21	$\models \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\phi)\urcorner$	non-contradiction

Quelques-unes de ces tautologies ont une histoire considérable.[5]

Dans le cas où une équivalence matérielle est tautologique, on parle d'équivalence sémantique. Deux formules qui sont sémantiquement équivalentes peuvent être substituées l'une pour l'autre dans n'importe quelle formule sans affecter sa table de vérité. Nous constatons ainsi que la définition de l'équivalence matérielle en terme d'implication matérielle et la définition de l'implication matérielle en terme de négation et disjonction ou de négation et conjonction, sont *correctes* : les tautologies **T1**, **T2** et **T3** nous assurent que nous pouvons universellement substituer le *definiendum* au *definiens* ('annulant' ainsi notre définition). De même, **T4** et **T5** nous assurent de la correction des lois de Morgan, ainsi que **T6** et **T7** de celle des lois de distributivité.

Les implications matérielles tautologiques sont des implications formelles, c'est-à-dire des relations de conséquence sémantique. Elles nous assurent de la correction des règles d'inférence : le fait que $\ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \phi) \rightarrow \psi\urcorner$ est une tautologie (**T14**), par exemple, nous montre que la règle *modus ponens* (MP) nous ne produit que de vérités à partir de vérités – qu'il ne peut pas être le cas que les prémisses de ce schéma d'inférence soient vraies et la conclusion fausse et, en conséquence, que le schéma d'inférence est valide. De même, les autres implications formelles nous garantissent la correction des règles d'inférence dérivées ('dérivées' parce qu'elles ne faisaient pas partie de notre calcul initial). C'est grâce à (**T8**), par exemple, que nous pouvons passer de $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ à $\ulcorner\neg\psi \rightarrow \neg\phi\urcorner$. Ces règles d'inférence dérivées facilitent les preuves dans le calcul, parce qu'elles

[4] Pour le voir, il suffit de remarquer que $\ulcorner(\phi \vee \neg\phi) \vee \psi\urcorner$ est une tautologie pour n'importe quelle formule ψ.

[5] Notamment la réduction à l'absurde : "Si tu sais que tu es mort, alors tu es mort (car on ne peut savoir une chose fausse) ; si tu sais que tu es mort, alors tu n'es pas mort (car un mort ne sait rien) ; donc, tu ne sais pas que tu es mort." (un stoïcien, rapporté par Origène ; d'après Blanché (1996: 70–71)). La 'conséquence miraculeuse' ('consequentia mirabilis') se trouve, d'après Blanché (1996: 71), déjà chez Aristote : "S'il ne faut pas philosopher, il faut philosopher (pour prouver qu'il ne faut pas philosopher) ; donc il faut philosopher." (*Protreptique*)

épargnent la pénible tâche qui consiste à chercher les substitutions adéquates dans les axiomes.

Bien que, par exemple, la tautologie **T14** et la règle MP soient intimement liées (dans la mesure où la première nous assure de la correction de la deuxième), il faut tout de même les distinguer. Les tautologies sont des phrases du langage-objet qui (quoique dénuées de contenu, d'après certains philosophes) parlent des objets (comme "Socrate est ou bien mort ou bien ne l'est pas" parle de Socrate). Les règles, en revanche, sont des énoncés métalinguistiques : MP nous dit, par exemple, que de deux formules $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et ϕ nous pouvons inférer une troisième, à savoir ψ.

Il a été dit que les implications formelles nous permettent de faciliter les preuves à l'aide de règles d'inférence dérivées. Mais est-ce vraiment le cas ? Qu'est-ce qui nous assure que notre méthode purement syntaxique respecte les relations sémantiques ? Afin de répondre à ces questions, il faut traiter de la relation entre "$\vdash$" et "$\models$" plus en détail.

2 Les relations entre conséquence sémantique et déductibilité

Nous avons dit que la logique traite de la relation de conséquence et cherche à déterminer quelles propositions suivent de quelles autres. Nous avons développé des notions précises de conséquence sémantique ($\models$) et de déductibilité syntaxique ($\vdash$). Maintenant, nous devons nous demander quelles sont les relations entre ces deux 'types' de 'conséquence'. Quel est le rapport entre "$\phi \models \psi$" ("ψ est une conséquence sémantique de ϕ") et "$\phi \vdash \psi$" ("ψ peut être dérivé de ϕ dans un certain calcul) ?

Pour notre calcul hilbertien HC, deux théorèmes importants (des preuves *sur* le calcul) nous assurent que les deux notions sont équivalentes. HC est correct : HC ne prouve aucune proposition qui n'est pas une tautologie ; HC est aussi complet : HC prouve toutes les tautologies :

théorème de correction : HC est correct : tout théorème est une tautologie.

théorème de complétude : HC est complet : toute tautologie est un théorème.

On a donc la relation suivante (soit Th une théorie et ϕ une formule propositionnelle) :

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \models \phi$$

La direction '$\Longrightarrow$' est assurée par le théorème de correction et veut dire que HC ne prouve pas trop, c'est-à-dire ne prouve pas plus que les vérités logiques. La direction inverse '$\Longleftarrow$' est assurée par le théorème de complétude : HC prouve assez – en d'autres termes, il n'y a pas de vérités logiques qui ne soient pas prouvables dans HC.

Pris ensemble, les théorèmes de correction et de complétude nous assurent que notre axiomatisation de la logique propositionnelle par le calcul HC est *adéquate* : on a réussi à capturer toutes les propositions que l'on voulait, et pas plus. Ils nous montrent que le calcul syntaxique est en harmonie avec la sémantique.

Théorème 6 (Correction de HC). *Soit* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle :*

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Th} \models \phi \tag{4}$$

PREUVE Nous prouvons, par induction sur n,[6] que :

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Th} \models \phi \tag{1}$$

[6] Une preuve par induction sur les nombres naturels montre qu'une certaine proposition est vraie de 0 ('base de l'induction') et que, si elle est vraie pour $n-1$ ('hypothèse d'induction'), alors elle est aussi vraie pour n (ce deuxième pas s'appelle le 'pas de l'induction').

1. Si $n = 0$, alors ϕ est ou bien un axiome de HC ou bien un élément de Th. On montre, par les tables de vérité, que tous les axiomes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$ sont des tautologies. Si $\phi \in \mathsf{Th}$, alors il est évident que $\mathsf{Th} \models \phi$.
2. Supposons que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ et que (1) est vraie pour tous les nombres naturels $n' < n$. Si ϕ est un axiome ou un théorème, "$\mathsf{Th} \models \phi$" est vraie. La seule autre possibilité est que l'on ait obtenu ϕ par l'application de MP à deux autres théorèmes. Dans ce cas, il y a une formule ψ et des nombres naturels n' et n'' tels que :

$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \ \vdash\ ^{n'}\psi \to \phi \tag{2}$$
$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \ \vdash\ ^{n''}\psi \tag{3}$$
$$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \ \vdash\ ^{n}\phi \tag{4}$$

Par l'hypothèse d'induction, nous savons que (1) est vraie des lignes (2) et (3). On a donc :

$$\mathsf{Th} \models \psi \to \phi$$
$$\mathsf{Th} \models \psi$$

Puisque nous savons que MP est une règle d'inférence valide, nous pouvons inférer :
$\mathsf{Th} \models \phi$

□

Bref, pour une preuve de correction il suffit de prouver que les axiomes sont des tautologies et que les règles d'inférence sont valides. Par la définition de la validité, il s'ensuit que tous les théorèmes sont des tautologies.

La complétude d'un calcul est, en général, beaucoup plus difficile à prouver que sa correction. Nous nous limitons donc ici à énoncer le théorème :

Théorème 7 (Complétude de HC). *Soit* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle :*

$$\mathsf{Th} \models \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \tag{5}$$

Nous verrons dans la leçon 8 que la méthode des arbres nous facilite cette démonstration.

3 La nature de la logique

Nous avons introduit la négation "$\neg$" par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Cette table de vérité montre que la valeur de vérité d'une proposition qui est formée d'une négation (comme connecteur principal) et d'une autre proposition plus simple est l'inverse de la valeur de vérité de cette autre proposition. Selon le principe de vérifonctionnalité, cette table de vérité détermine complètement la signification de "$\neg$". Il y a, cependant, une autre manière de spécifier cette signification, une manière préférée par ceux qui ne pensent pas que la logique est l'étude de quelques vérités (les 'vérités logiques'), mais plutôt qu'elle est l'étude des inférences. Selon eux, une logique n'est pas caractérisée par ses tautologies, mais par la relation de conséquence qui rend valides certaines inférences. Les connecteurs propositionnels ne sont pas caractérisés par leurs tables de vérité, mais par les règles d'introduction et d'élimination qui gouvernent leur comportement inférentiel.

Parmi les philosophes qui se sont interrogés sur la nature de la logique, on peut en effet distinguer deux courants : selon un premier courant, la logique essaie de trouver, d'expliquer et de systématiser les tautologies :[7] selon un second, elle essaie de formaliser les inférences valides.[8] Le premier camp maintient souvent, avec Wittgenstein, que les vérités logiques sont dénuées de contenu ('*sinnlos*'), mais qu'elles ne sont pas dénuées de sens ('*unsinnig*') : quoiqu'elles ne nous informent pas sur le monde (car elles n'excluent aucune possibilité), elles font, en tant que cas limites, partie du langage sensé ("Elles font partie du formalisme." *Tractatus*, §4.4611).

La première approche consiste donc dans l'élaboration d'un calcul qui axiomatise un certain nombre de propositions, appelées 'théorèmes'. La seconde formalise certaines inférences, des transitions de quelques propositions à d'autres. La première approche réussit si et seulement si les théorèmes (les propositions axiomatisés) sont les tautologies (et il ne reste pas de tautologies qui ne sont pas axiomatisées par le calcul), c'est-à-dire si le calcul est complet et correct ; la seconde approche réussit si et seulement si les inférences formalisées sont valides et suffisent pour capturer tout le raisonnement 'logique' en question.

Les deux projets de recherche peuvent être entrepris de manière sémantique ou de manière syntaxique. Si l'on s'intéresse principalement aux vérités logiques, on cherchera à les axiomatiser à l'aide d'un calcul et à prouver que ce calcul est correct et complet (en bref : adéquat) par rapport à l'ensemble des propositions que l'on voulait axiomatiser.[9] Dans la seconde perspective, qui s'intéresse à la validité des arguments (et à la correction des inférences) plutôt qu'aux vérités logiques (bien que les deux intérêts soient étroitement liés), on essaie de développer une méthode syntaxique et structurelle de déduction. Une telle méthode est la méthode de la 'déduction naturelle', que l'on abordera dans la leçon 6. Une autre méthode est celle des tableaux analytiques, aussi appelée la 'méthode des arbres'. Les deux méthodes sont syntaxiques : elles font le travail que, pour les adhérents de l'autre perspective, font les calculs. La différence principale entre ces trois techniques et les calculs hilbertiens est qu'elles comportent de nombreuses 'règles d'inférence', tandis que les calculs hilbertiens n'ont normalement qu'une seule règle d'inférence (le plus souvent *modus ponens*), mais de nombreux axiomes.

La méthode de la déduction naturelle a été introduite, d'une part par Jaskowski (1934), d'autre part par Gentzen (1934). Simultanément, Gentzen a défini un calcul des séquents. Vingt ans plus tard, Beth (1955) a formulé sa méthode des tableaux analytiques et Hintikka (1955) a proposé la méthode des 'ensembles de vérité' ('truth sets') qui, dans la systématisation de Smullyan (1968), sont devenus la méthode des arbres. Ce n'est que récemment qu'il a été prouvé que le calcul des tableaux analytiques et le calcul des séquents sont équivalents, c'est-à-dire que tout ce qui peut être prouvé par l'une des méthodes peut être prouvé par l'autre également et vice versa..

4 La méthode des arbres

La méthode des arbres, nous l'avons déjà relevé, est une méthode syntaxique pour prouver certaines propositions. Elle est, cependant, 'moins' syntaxique que la méthode des calculs hilbertiens parce qu'elle utilise des règles qui se prêtent à une interprétation en termes de tables de vérité. Pour motiver la méthode des arbres, rappelons les neuf faits suivants :

F1 Si une négation $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ est fausse, alors ϕ est vraie.

F2 Si une conjonction $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ est vraie, alors ϕ et ψ sont vraies.

F3 Si une conjonction $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ est fausse, alors ou bien ϕ ou bien ψ est fausse.

F4 Si une disjonction $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ est vraie, alors ϕ ou ψ est vraie.

F5 Si une disjonction $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ est fausse, alors ϕ et ψ sont fausses.

[7] Ainsi Blanché, dans son introduction à la logique, dit-il que la logique (propositionnelle) est la recherche des tautologies (Blanché 1996: 65). Les figures les plus connues de ce camp sont Quine, Tarski et Wittgenstein.

[8] Dans ce camp, il faut nommer surtout le logicien allemand Gerhard Gentzen.

[9] Nous parlerons plus tard, dans la leçon 8, de la correction et la complétude des calculs en général.

F6 Si une implication $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ est vraie, alors ou bien ϕ est fausse ou bien ψ est vraie.

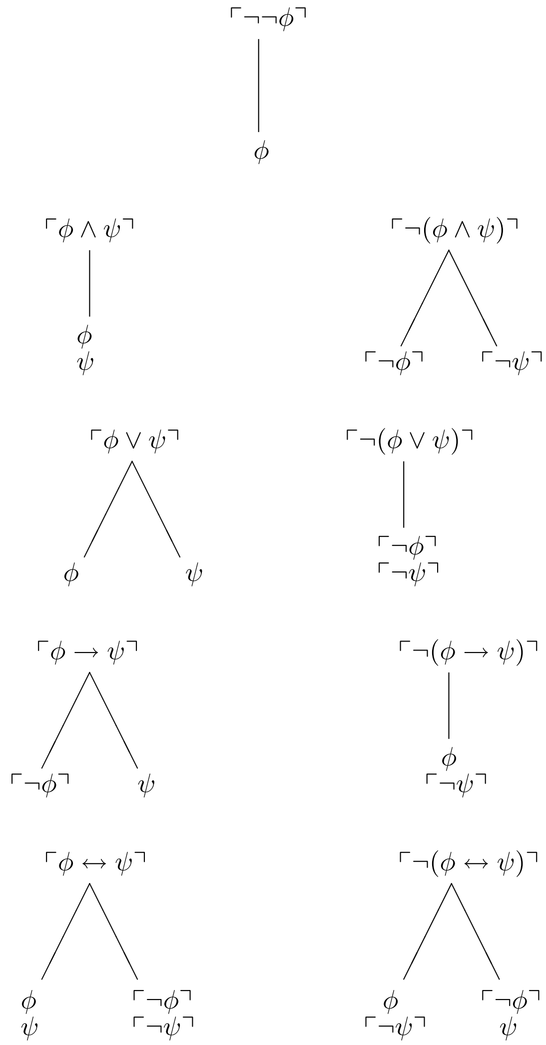
F7 Si une implication $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est vraie et ψ est fausse.

F8 Si une équivalence $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ est vraie, alors ou bien ϕ et ψ sont vraies ou bien ϕ et ψ sont fausses.

F9 Si une équivalence $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ est fausse, alors ou bien ϕ est vraie et ψ fausse ou bien ϕ est fausse et ψ vraie.

De ces neuf faits, on dérive des règles pour construire des arbres. **F2**, par exemple, nous dit que nous pouvons décomposer $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ en ϕ et en ψ et les placer sur la même branche : si $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$ se trouve sur un chemin de l'arbre, alors ϕ et ψ devront se trouver sur ce même chemin, car si $\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner$ est vraie, ϕ et ψ le sont aussi. **F3** nous dit que si $\ulcorner\neg(\phi\wedge\psi)\urcorner$ se trouve sur un chemin, alors ou bien $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ ou bien $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ devrait se trouver sur le même chemin. Construire un arbre correspondant à une expression complexe consistera à construire des chemins à partir de l'expression initiale en utilisant les règles de construction d'arbres. Les chemins ainsi obtenus dans l'arbre (considérés de bas en haut) seront des 'chemins de vérité'.

Ces neuf faits correspondent donc à neuf règles de construction d'arbres :



Nous appliquons ces règles de manière itérative, jusqu'à ce qu'aucune des règles ne soit applicable – cela n'est le cas que si les seules propositions non-traitées sont des propositions simples ou des négations de propositions simples. Nous pouvons 'fermer' une branche si et seulement si elle contient une proposition simple, par exemple "p", et aussi sa négation "$\neg p$". Pour ceci, il n'est pas nécessaire que l'arbre soit entièrement développée : dès que nous trouvons une contradiction, nous pouvons fermer la branche correspondante.

Voici un exemple. Nous commençons par une conjonction de trois propositions complexes, appliquons la règle de conjonction et développons ensuite la disjonction qui est le deuxième conjoint :

$$\begin{array}{ccc}
\checkmark & & (p \to q) \wedge (p \vee r) \wedge (s \wedge \neg q) \\
 & & | \\
 & & p \to q \\
\checkmark & & p \vee r \\
 & & s \wedge \neg q \\
 & & \diagup \quad \diagdown \\
 & & p \qquad\qquad r
\end{array}$$

Après avoir appliqué une règle à une formule dans une branche, nous la marquons par le signe "✓". Après chaque application d'une règle, nous déterminons si nous pouvons déjà fermer une branche. A présent, nous ne le pouvons pas (encore).

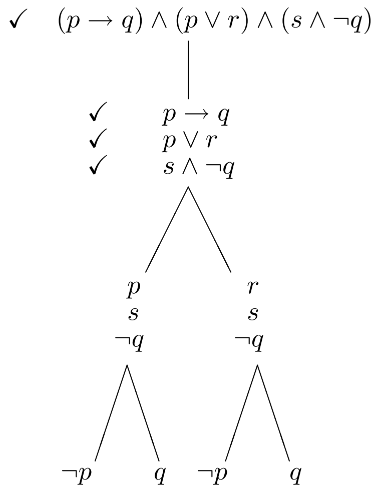
Nous avons commencé avec trois formules qui peut-être étaient toutes vraies. Ce que nous dit notre arbre maintenant, c'est qu'il y a deux manières dont les trois formules pourraient être vraies : une manière serait que "$p \to q$", "$s \wedge \neg q$" et "p" soient vraies, une autre que "$p \to q$", "$s \wedge \neg q$" et "r" soient vraies.[10] Nous distribuons maintenant la conjonction "$s \wedge \neg q$" sur les branches (et marquons la troisième formule comme 'traitée') :

$$\begin{array}{ccc}
\checkmark & & (p \to q) \wedge (p \vee r) \wedge (s \wedge \neg q) \\
 & & | \\
 & & p \to q \\
\checkmark & & p \vee r \\
\checkmark & & s \wedge \neg q \\
 & & \diagup \quad \diagdown \\
 & & p \qquad\qquad r \\
 & & s \qquad\qquad s \\
 & & \neg q \qquad\quad \neg q
\end{array}$$

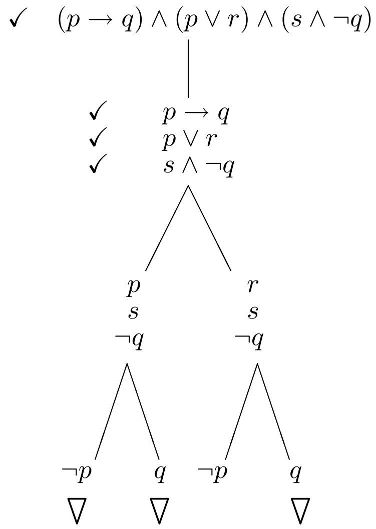
Comme la règle de conjonction nous dit de continuer avec les deux conjoints, il faut mettre "s" et "$\neg q$" dans les deux branches.

Encore une fois, nous vérifions si nous pouvons 'fermer' une branche : nous ne le pouvons pas. Nous appliquons maintenant la règle de l'implication à la première de nos trois formules initiales (l'implication est la seule formule complexe qui nous reste, et donc la seule à qui nous pouvons appliquer une règle pour développer davantage l'arbre). Cette règle d'implication nous dit d'ouvrir deux nouvelles branches : l'une avec la négation de l'antécédent et l'autre avec le conséquent. Nous obtenons donc :

[10] Nous pouvons donner une motivation 'dialogique' à cette interprétation : un arbre représente les choix dialogiques d'un défenseur de la proposition initiale. En défendant la vérité d'une disjonction, par exemple, je peux me contenter de défendre un des disjoints ; pour défendre une conjonction, cependant, il faut défendre les deux conjoints etc. Dire qu'une branche se ferme revient à dire que l'argument qui a pris le 'chemin de vérité' correspondant a échoué : la défense n'a pas pu montrer que la proposition initiale pouvait être vraie.



Cette fois, nous pouvons fermer quelques-unes de nos quatre branches. Celle à gauche contient "$\neg p$" et "p", la deuxième en partant de la gauche "q" et "$\neg q$", celle toute à droite contient aussi "q" et "$\neg q$". Nous indiquons le fait qu'une branche a été fermée par le signe "$\triangledown$" :

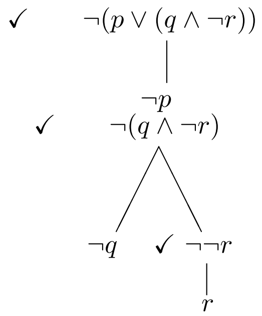


Le fait que nous avons fermé trois des quatre branches veut dire que ces branches ne représentent pas des manières dont les formules initiales pourraient être vraies ensemble. Le tableau nous montre donc qu'il n'y a qu'une seule manière pour les formules initiales d'être vraies ensemble : il faut que les formules sur la seule branche ouverte soient toutes vraies, en d'autres termes que "r", "s", "$\neg q$" et "$\neg p$" soient vraies. Dans une table de vérité, cette possibilité logique correspondrait à la ligne F-F-V-V du tableau. Nous voyons donc que la méthode des arbres peut nous servir de teste de *consistance* : si une des branches reste ouverte, il y a une possibilité logique pour les propositions initiales d'être vraies ensemble et elles forment donc un ensemble consistant.

A ce point, nous ne pouvons plus développer le tableau, puisque toutes les formules non-précédées du signe "$\checkmark$" sont ou bien des propositions simples ou bien des négations de propositions simples, et nous ne disposons que de règles qui s'appliquent à des propositions complexes.

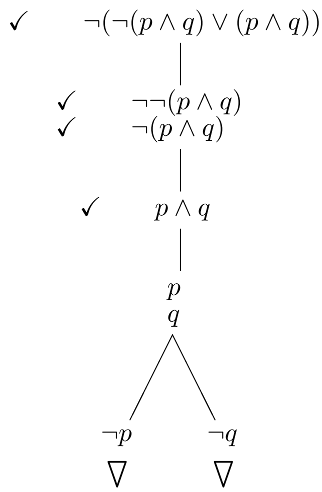
Si l'on avait fermé toutes les branches, on saurait que les ou la formule(s) initiale(s) ne pouvai(en)t pas être vraie(s) : il s'agissait d'une contradiction (dans le cas d'une proposition) ou d'un ensemble de propositions inconsistant.

Les arbres nous permettent donc de visualiser les conditions de vérité d'une proposition complexe. Examinons un deuxième exemple :



L'application des règles nous permet d'interpréter cet arbre de la façon suivante : "$\neg(p \vee (q \wedge \neg r))$" est vraie si et seulement si "$\neg p$" et "$\neg q$" sont vraies (la branche à gauche) ou "$\neg p$" et "r" sont vraies (la branche à droite). Il y a donc deux 'chemins de vérité' complets dans cet arbre, deux manières dont la proposition complexe pourrait être vraie.

Une contradiction est caractérisée par le fait que chacun des chemins de son arbre contient une proposition simple et aussi sa négation, c'est-à-dire que toutes ses branches se ferment :



Un des chemins de cet arbre contient "p" et "$\neg p$", l'autre "q" et "$\neg q$".[11]

La méthode des arbres, comme méthode syntaxique, nous permet de prouver des propositions : on prouve une proposition en montrant que l'arbre de sa négation ne contient que des branches fermées. Interprété sémantiquement, le fait que toutes les branches se ferment signifie qu'il n'y a aucune possibilité pour la proposition initiale d'être vraie, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une contradiction. Comme une proposition est une contradiction si et seulement si sa négation est une tautologie, nous avons donc une méthode pour tester le caractère tautologique d'une proposition. Il suffit de faire l'arbre de sa négation et de voir si toutes les branches se ferment. Si cela est le cas, la proposition initiale est une tautologie ; si non, elle ne l'est pas.[12]

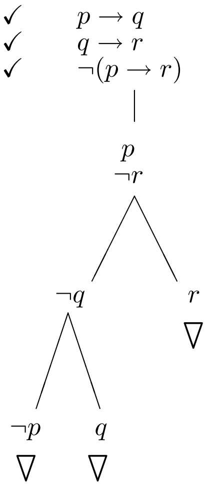
Les arbres peuvent nous donc servir de critère lors de la détermination du caractère tautologique ou non-tautologique d'une proposition. Une inférence est valide si et seulement si l'implication matérielle de sa conclusion par (la conjonction de) ses prémisses est une tautologie. Si l'arbre

[11] Selon l'interprétation 'dialogique' de la méthode des arbres, la fermeture d'une branche représente le cul-de-sac dans lequel est tombé un interlocuteur qui a choisi cette stratégie pour défendre sa thèse initiale. S'il n'y a que des culs-de-sac, la thèse ne peut pas être défendue.

[12] J'explique ici une méthode syntaxique en termes sémantiques, présupposant déjà que la méthode des arbres est correcte et complète par rapport à la sémantique de la logique propositionnelle. Nous n'établirons ce résultat que plus tard.

correspondant à cette implication (qui est l'arbre pour la conjonction des prémisses et la négation de la conclusion) n'a que des branches fermées, il n'y a aucune interprétation qui rend vraies et toutes les prémisses et la négation de la conclusion : la négation de la conclusion est inconsistante avec les prémisses. En d'autres termes, toute interprétation qui rend vraie l'ensemble des prémisses rend vraie la conclusion. En conséquence, l'inférence est valide.

Parce qu'elle nous procure un test pour déterminer si une proposition est une tautologie ou non, nous pouvons donc utiliser la méthode des arbres pour tester la validité des inférences. Pour tester la validité, par exemple, de l'argument "$p \rightarrow q$; $q \rightarrow r$; donc $p \rightarrow r$" (vérifier si "$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$" est vraie), nous déterminons si la négation de sa conclusion est consistante avec ses prémisses – s'il y a une possibilité logique que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse. Nous construisons l'arbre suivant :



Observant que toutes les branches se ferment, nous concluons qu'il n'y a pas d'interprétation qui rende vraies "$p \rightarrow q$", "$q \rightarrow r$" et "$\neg(p \rightarrow q)$", c'est-à-dire que toute interprétation qui rend vraies "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow r$" rend aussi vraie la conclusion de l'argument, "$(p \rightarrow q)$". L'argument est donc valide.

La méthode des arbres est une méthode efficace qui permet de déterminer si un énoncé est une tautologie ou non. L'application d'une règle à une formule a pour résultat de ramener le problème à l'application d'autres règles sur des formules plus courtes. Étant donné qu'au point de départ nous avons un nombre fini de propositions qui possèdent chacune un nombre fini de symboles, après un nombre fini d'étapes, l'arbre sera totalement développé et nous pourrons vérifier si tous les chemins se ferment ou non.

Comme test de validité d'un argument, la méthode des arbres a l'avantage supplémentaire de nous procurer une information cruciale dans le cas où le test échoue : la branche qui reste ouverte nous indique comment il faut construire un contre-exemple, c'est-à-dire quelle est l'interprétation propositionnelle qui rend vraies les prémisses et fausse la conclusion.

Il y a néanmoins des choix à faire : dans l'application des règles à certaines propositions plutôt que d'autres, on risque de compliquer l'arbre et de devoir répéter les mêmes formules sur différentes arbres. En général, il est conseillé de toujours traiter d'abord les propositions qui n'ouvrent pas de nouvelles branches, ce qui évite de devoir répéter la même formule dans branches différentes.

Sous guise de résumé, on peut dire que la méthode des arbres met à notre disposition trois testes d'une grande utilité :

– Comme teste de *consistance*, elle nous permet d'établir si ou non une proposition ou un ensemble de propositions est consistant et, dans le cas d'une réponse affirmative, de trouver une interprétation pertinente.
– La méthode des arbres nous permet d'établir si ou non une proposition donnée est une *tautologie* :

elle l'est si et seulement si l'arbre pour sa négation ne contient que des branches fermées.
– La méthode des arbres nous permet également de tester un argument pour sa *validité*, en vérifiant si ou non l'implication correspondante est une tautologie.

Références

Evert Willem Beth, 1955, "Semantic Entailment and Formal Derivability", *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschappen, afd. lettterkunde, new series* 18(13), amsterdam, Holland : N. V. Noord-Hollansche Uitgevers maatschappij.

Robert Blanché, 1996, *Introduction à la logique contemporaine*, Collection Cursus, série "Philosophie" , Paris, France : Armand Colin.

Gerhard Gentzen, 1934, "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift* 39, pp. 176–210, 405–431, republished as Gentzen (1969), translated as "Investigations into logical deduction" in Szabo (1969: 68–131).

Gerhard Gentzen, 1969, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Darmstadt, Germany : Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Jaakko Hintikka, 1955, "Form and content in quantification theory", *Acta Philosophica Fennica* 8, pp. 7–55.

Stanislaw Jaskowski, 1934, "On the Rules of Suppositions in Formal Logic", *Studia Logica* 1, reprinted in McCall (1967).

Storrs McCall (éd.) 1967, *Polish Logic 1920–1939*, Oxford, England : Clarendon Press.

Raymond M. Smullyan, 1968, *First-Order Logic*, nombre 43 dans Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, Germany : Springer Verlag.

M.E. Szabo (éd.) 1969, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Amsterdam, Holland : North-Holland Publishing Co.