Sixième leçon

Cours d'introduction à la logique et la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Philipp Keller

A lire pour le cours du 9 décembre 2003

1 Les suppositions

Nous avons rencontré deux manières de construire des preuves :

1. un calcul hilbertien, où il faut d'abord trouver les bons axiomes, ensuite en faire des substitutions, et enfin appliquer la règle d'inférence MP dans le bon ordre à ces substitutions ;
2. la méthode des arbres (ou : la méthode des tableaux analytiques), où l'on décompose successivement la formule initiale en cherchant une interprétation sous laquelle elle est vraie.

La méthode de la réduction à l'absurde, que l'on a introduit comme règle d'introduction de la négation, ne s'insère dans aucune de ces catégories. La raison pour cela est qu'elle utilise essentiellement la notion d'une '*supposition*'. Dans la langue naturelle, une supposition est l'énonciation d'une proposition qui manque de force assertoire. Au niveau pragmatique, la force assertoire est ce qui distingue une assertion d'une question ou d'un ordre : c'est en vertu de la force assertoire que quelqu'un qui affirme qu'il pleut s'engage à la vérité de "il pleut". Si son énonciation manque de force assertoire, on ne peut pas le contredire en disant qu'il ne pleut pas. En effet, il n'a pas affirmé qu'il pleut : il l'a seulement demandé, ordonné ou supposé.

Nous avons déjà fait de nombreuses suppositions tout au long de ce cours. Prenons les exemples suivants :

1. "Imaginons que quelqu'un maintient qu'il ne faut pas manger de la viande. Il pourrait avoir deux types de raisons : ..."
2. "Quelqu'un qui affirme que "p" et "$p \to q$" sont vraies, devrait affirmer que q."
3. "Tout en étant convaincus que $\neg p$, supposons que p. Il s'ensuit alors que le numéro 2 n'est pas égal a la somme de 1 + 1, ce qui, nous le savons, est faux. La supposition que p était donc fausse. Donc $\neg p$."
4. "Si, comme certains l'affirment, il y a un Dieu, alors ce Dieu est omnipuissant. S'il est omnipuissant, alors il peut créer une pierre qui est si lourde que Lui-même Il ne peut pas la soulever. Mais ceci est impossible. Donc il n'y a pas de Dieu."

Dans une preuve par réduction à l'absurde il serait absurde de reprocher à celui qui la profère de s'être contredit en démontrant (et donc en affirmant) que la proposition du départ est fausse. Ceci montre qu'on a affaire à une supposition : c'est en supposant "p" et en montrant qu'une contradiction s'ensuit qu'on démontre que $\neg p$.

C'est l'usage des suppositions qui caractérise la méthode de la déduction naturelle que l'on abordera dans cette leçon. La déduction naturelle est une manière intuitive de faire des preuves qui correspond bien aux raisonnements dans une argumentation. Parce qu'elle nous permet de prouver des théorèmes et parce que l'on peut démontrer que ses théorèmes sont des tautologies, la déduction naturelle est de même une méthode permettant de calculer la validité des arguments : opérant étape par étape, chacune contenant sa propre règle pour aller des prémisses à des conclusions intermédiaires, nous arrivons à la conclusion finale de l'argument.

Même si l'on ne s'engage pas à la vérité de ce que l'on suppose, on tombe sous une obligation correspondante : celle de tenir compte de ces suppositions. De nombreux raisonnements fallacieux se produisent en prenant une supposition pour un fait établi. C'est pourquoi il faut toujours marquer les suppositions dans une colonne à gauche. Considérons le début d'une preuve que $\neg p$:

1		$\vdash\ p \rightarrow q$	prémisse
2		$\vdash\ p \rightarrow (q \rightarrow r)$	prémisse
3		$\vdash\ \neg r$	prémisse
4	p	$\vdash^*\ p$	supposition
5	p	$\vdash^*\ q$	de (1) et (4) avec (MP)
6	p	$\vdash^*\ q \rightarrow r$	de (2) et (4) avec (MP)
7	p	$\vdash^*\ r$	de (5) et (6) avec (MP)

Les lignes 5 à 8 sont toutes gouvernées par la supposition que p – on a prouvé "r" *sous la supposition que p* (indiqué par l'astérisque dans "$\vdash^*$"). Pour pouvoir dire que l'on a réellement prouvé la vérité d'une certaine proposition, il faut enlever cette proposition et passer de "$\vdash^*$" à "$\vdash$". Comment se défaire d'une supposition ?

Une règle d'inférence qui nous permet de ôter une supposition est la *réduction à l'absurde*. Considérons la preuve suivante :

1		$\vdash\ p \rightarrow q$	prémisse
2		$\vdash\ q \rightarrow \neg p$	prémisse
3	p	$\vdash^*\ p$	supposition
4	p	$\vdash^*\ q$	de (1) et (3) avec (MP)
5	p	$\vdash^*\ \neg p$	de (2) et (4) avec (MP)
6		$\vdash \neg p$	de (3) et (5) par *réduction à l'absurde*

Nous avons supposé que p, dans la ligne 3, et montré sous cette supposition que $\neg p$ (lignes 4 et 5). Nous pouvons donc conclure que $\neg p$ – sans aucune supposition : si la supposition que p nous mène à une contradiction, alors $\neg p$ (ligne 6).

L'introduction des suppositions nous permet de compléter non seulement notre discussion sur la négation, mais également celle sur l'implication matérielle. Nous avons vu que la règle d'élimination pour l'implication matérielle était la règle d'inférence *modus ponens* (MP) :

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash p \rightarrow q \\ \vdash p\end{array}}{\vdash q} \ \rightarrow \mathbf{E}$$

Dans la deuxième leçon, nous n'avions pas les ressources pour introduire la règle d'introduction correspondante, celle de la *preuve conditionnelle* (PC) :

$$\frac{\begin{array}{cc} p & \vdash^*\ p \\ & \vdots \\ p & \vdash^*\ q \end{array}}{\vdash\ p \rightarrow q} \ \rightarrow \mathbf{I} \ \text{ ou } \ \mathsf{PC}$$

Cette règle nous permet de remplacer une supposition par une implication matérielle : si "q" a été prouvé sous la supposition que p, nous avons prouvé, sous aucune supposition, que $p \rightarrow q$. Avec cette règle à notre disposition, continuons notre preuve que $\neg p$:

7	p	$\vdash^* \; r$	de (6) et (7) avec (MP)
8		$\vdash \; p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
9		$\vdash \; \neg r \rightarrow \neg p$	de (8) par *conversion*
10		$\vdash \; \neg p$	de (3) et (9) par (MP)

Dans la ligne (9), nous avons utilisé une nouvelle règle d'inférence, appelée 'conversion' dont le schéma est le suivant :

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p} \quad \text{conversion} \tag{1}$$

Ce schéma correspond à la tautologie "$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$" et est donc valide. Il correspond à une utilisation de la règle de *modus tollens* (MT) :

3	$\vdash \; \neg r$	prémisse
8	$\vdash \; p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
9	$\vdash \; \neg p$	de (3) et (9) par (MT)

Nous voyons que dans un calcul de déduction naturelle, il est facile d'introduire des règles d'inférence dérivées (comme nous l'avons fait avec la règle de la conversion). Dans un calcul hilbertien, on aurait été obligé de procéder comme suit :

3	$\vdash \; \neg r$	prémisse
8	$\vdash \; p \rightarrow r$	
8a	$\vdash \; (p \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p)$	axiome ($\mathbf{H_{11}}$)
8b	$\vdash \; \neg r \rightarrow \neg p$	de (7) et (8a) par (MP)
9	$\vdash \; \neg p$	de (3) et (8b) par (MP)

La nouvelle règle d'inférence (MT) nous permet d'épargner les lignes (8a) et (8b).

2 Les règles d'introduction et d'élimination

L'utilisation d'une langue formelle pour la logique propositionnelle nous met dans l'obligation d'expliquer ce que nous voulons dire par les symboles introduits à ce propos : nous devons fixer leur signification. Une manière sémantique de le faire est de donner des tables de vérité, exploitant ainsi le principe de vérifonctionnalité.

Outre les tables de vérité, il y a une autre méthode permettant de déterminer la signification des connecteurs propositionnels : les règles d'introduction et d'élimination déterminent le comportement 'inférentiel' de ces connecteurs – ce qui, pour ceux qui conçoivent la logique comme systématisation d'inférences, comprend l'essentiel de leur signification. Complétant notre discussion, nous postulons les règles suivantes comme règles d'introduction et d'élimination pour les connecteurs propositionnels :

$$\frac{\vdash\ \ulcorner\phi \to \bot\urcorner}{\vdash\ \ulcorner\neg\phi\urcorner}\ \neg\mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\vdash\ \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner}{\vdash\ \phi}\ \neg\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash\ \psi\\ \vdash\ \phi\end{array}}{\vdash\ \ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner}\ \wedge\mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\vdash\ \ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner}{\vdash\ \phi}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \frac{\vdash\ \ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner}{\vdash\ \psi}\ \wedge\mathbf{E}$$

$$\frac{\vdash\ \phi}{\vdash\ \ulcorner\phi\vee\psi\urcorner}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash\ \psi}{\vdash\ \ulcorner\phi\vee\psi\urcorner}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash\ \ulcorner\neg\phi\urcorner\\ \vdash\ \ulcorner\phi\vee\psi\urcorner\end{array}}{\vdash\ \psi}\ \vee\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi\ \vdash^*\ \phi\\ \phi\ \vdash^*\ \psi\end{array}}{\vdash\ \ulcorner\phi\to\psi\urcorner}\ \to\mathbf{I} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash\ \phi\\ \vdash\ \ulcorner\phi\to\psi\urcorner\end{array}}{\vdash\ \psi}\ \to\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash\ \ulcorner\psi\to\phi\urcorner\\ \vdash\ \ulcorner\phi\to\psi\urcorner\end{array}}{\vdash\ \ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash\ \ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner}{\vdash\ \ulcorner\phi\to\psi\urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{E} \quad \frac{\vdash\ \ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner}{\vdash\ \ulcorner\psi\to\phi\urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{E}$$

Ces règles, avec quelques modifications, seront les règles de la déduction naturelle.[1]

Ces règles, comme les règles d'inférence, sont schématiques : la règle ($\neg\mathbf{E}$), par exemple, nous dit que nous pouvons prouver une proposition "p" à partir de sa double négation "$\neg\neg p$" (et que nous pouvons également prouver "$p \wedge q$" à partir de "$\neg\neg(p \wedge q)$", "$(p \to q) \vee r$" à partir de "$\neg\neg((p \to q) \vee r)$" etc).

Il est important de noter que ces règles reviennent à une spécification syntaxique des connecteurs propositionnels (puisqu'on n'a pas postulé que ces règles soient valides). Comment est-ce possible ? Pour donner une 'spécification syntaxique' de la signification d'un connecteur, nous formulons des règles qui permettent de manipuler des formules qui le contiennent. Nous déterminons ainsi le comportement inférentiel de ce connecteur, en lui donnant une *définition implicite* : quelle que soit la signification de "$\wedge$", elle est telle qu'elle permet l'introduction de ce signe selon la règle $\wedge\mathbf{I}$.[2]

Il existe différentes façons de donner une définition implicite des connecteurs propositionnels : par un système d'axiomes comme l'est le calcul HC, par des règles de construction d'arbres et aussi par des règles d'élimination et d'introduction. Ces dernières sont de loin les plus intuitives et c'est sur elles que la méthode de la déduction naturelle est basée.

3 * Les règles de la déduction naturelle

Il a déjà été montré qu'il y a des axiomes du calcul hilbertien qui correspondent à des règles d'inférences de la déduction naturelle. Il s'agit d'un phénomène général : les calculs hilbertiens, normalement, consistent en de nombreux axiomes et une seule règle d'inférence – modus ponens (MP). Les calculs de la déduction naturelle – comme la méthode des arbres – n'ont pas d'axiomes, mais beaucoup de règles d'inférences pour déduire des théorèmes des prémisses. Nous allons discuter maintenant de quelques règles d'inférences en détail. Ces règles, prises ensemble, nous permettent de démontrer toute tautologie de la logique propositionnelle : elle forment une calcul correct et complet par rapport à la sémantique donnée de la logique propositionnelle.

[1] On fera une modification pour la règle d'introduction de la négation : la règle $\neg\mathbf{I}$ sera remplacée par les règles de modus tollens MP et de la réduction à l'absurde RAA. Une modification correspondante s'appliquera à la règle d'élimination de la disjonction $\vee\mathbf{E}$.

[2] Une définition explicite, en revanche, consiste en des conditions nécessaires et suffisantes d'une paraphrase : le definiens est universellement substituable pour le definiendum.

3.1 La règle des suppositions

A n'importe quel stade de la preuve, nous avons le droit d'introduire une supposition, à condition que nous le marquions dans la deuxième colonne à partir de la gauche :

n	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition

3.2 Modus ponens (modus ponendo ponens)

La règle de modus ponens (abrégée '(MP)' ou '($\rightarrow$ **E**)') nous permet de passer d'une implication matérielle et de son antécédent à son conséquent :

m	$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (MP)

3.3 Modus tollens (modus tollendo tollens)

La règle de modus tollens (abrégée '(MT)') nous permet de passer d'une implication matérielle et de la négation de son conséquent à la négation de son antécédent :

m	$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	de (m) et (n) par (MT)

La règle de modus tollens nous remplace la règle de conversion. Si on a prouvé "$p \rightarrow q$" et "$\neg q$", la conversion de la première nous donne "$\neg q \rightarrow \neg p$" et "$\neg p$" s'ensuit par (MP). Avec (MT), nous pouvons en déduire "$\neg p$" sans aucun pas intermédiaire.

3.4 Preuve conditionnelle

La règle de la preuve conditionnelle (abrégée '($\rightarrow$ **I**)' ou '(PC)') nous permet de transformer une sous-preuve (une preuve gouvernée par une supposition) en une preuve d'une implication matérielle ; elle nous permet de déduire une implication si et seulement s'il est possible de prouver par d'autres moyens que le conséquent de l'implication peut être dérivé de son antécédent.

m	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
o		$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	de (m) et (n) par (PC)

Dans la ligne (o), nous *déchargeons* la supposition ϕ par laquelle nous avons commencé la sous-preuve de (m) à (n) et nous *conditionalisons* le résultat intermédiaire ψ qui était gouverné par la supposition ϕ.

3.5 L'introduction et l'élimination de la double négation

La règle de l'élimination de la double négation (($\neg\mathbf{E}$) ou (DN)) est la suivante :

m	$\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	de (m) par (DN)

De la même manière, nous pouvons introduire une double négation (par exemple pour une application éventuelle de (MT)) :

m	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	de (m) par (DN)

3.6 La réduction à l'absurde (reductio ad absurdum)

La règle de la réduction à l'absurde ((RAA) ou ($\neg\mathbf{I}$)) nous permet de convertir une sous-preuve particulière (sous-preuve qui part de la supposition que p et en dérive une contradiction) en une preuve que $\neg p$:

m	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
o	ϕ	$\vdash^* \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
p		$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	de (m), (n) et (o) par (RAA)

Après avoir fait, à la ligne (m), la supposition ϕ, nous avons démontré ψ sous cette supposition (ligne (n)) et $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ (ligne (o)) sous cette même supposition – ψ et $\ulcorner\neg\psi\urcorner$, cependant, ne peuvent pas être vraies ensemble ; donc il faut conclure que la supposition initiale était fausse : on a prouvé $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ (ligne (p)). D'après cette règle, si votre interlocuteur pose une hypothèse ("p") dont on peut prouver qu'elle nous amène à une contradiction ("$q \wedge \neg q$"), alors cette hypothèse doit être rejetée et sa négation "$\neg p$" peut être affirmée.

3.7 L'introduction et l'élimination de la conjonction

La règle d'introduction de la conjonction ($\wedge\mathbf{I}$) nous permet d'inférer "$p \wedge q$" si on a déjà prouvé que p et que q :

m	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	de (m) et (n) par ($\wedge\mathbf{I}$)

L'élimination de la conjonction se fait en inférant un des conjoints de la proposition conjonctive :

m	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	de (m) par $(\wedge\mathbf{E})$

et aussi

m	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \psi$	de (m) par $(\wedge\mathbf{E})$

3.8 L'introduction et l'élimination de la disjonction

Les règles d'introduction de la disjonction sont 'duales' aux règles d'élimination de la conjonction :

m	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	de (m) par $(\vee\mathbf{I})$

m	$\vdash \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	de (m) par $(\vee\mathbf{I})$

Si Louis XVI a été guillotiné, alors ou bien il a été guillotiné, ou bien il a été pendu, même si l'on sait très bien qu'il n'a pas été pendu. L'élimination de la disjonction est un peu plus complexe et présuppose la règle des suppositions. Considérons le schéma de preuve suivant :

m		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
o	ϕ	$\vdash^* \ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
p	ψ	$\vdash^* \ \psi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
q	ψ	$\vdash^* \ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
r		$\vdash \chi$	de (m), (n), (o), (p) et (r) par $(\vee\mathbf{E})$

L'idée qui motive cette règle d'inférence est la suivante : si une disjonction "$p \vee q$" a été établie, et on montre que de "p" il s'ensuit que r et de "q" il s'ensuit que r – alors il s'ensuit de la disjonction que r ; et puisqu'on a prouvé la disjonction, on a prouvé que r.

3.9 L'introduction et l'élimination de l'équivalence matérielle

Puisque l'équivalence matérielle est simplement l'implication matérielle 'réciproque', on a comme règle d'introduction :

m	$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$	de (m) et (n) par ($\leftrightarrow$ **I**)

Les règles d'élimination nous montrent que l'équivalence est simplement la conjonction des deux implications matérielles :

m	$\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

m	$\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

4 Les preuves par déduction naturelle

Mis à part l'usage des suppositions, une deuxième caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est qu'elle nous permet d'incorporer des *prémisses* d'une manière naturelle. Dans un calcul hilbertien, il faut distinguer ce qui est dérivable *tout court* (les théorèmes) de ce qui est dérivable d'une théorie. Les théories, dans des calculs hilbertiens, jouent un rôle comparable à celui des prémisses dans la déduction naturelle. On marquera les prémisses dans la deuxième colonne à gauche, avec les suppositions. Contrairement aux suppositions, cependant, il ne faut pas les décharger pour avoir une preuve : la preuve elle-même sera 'conditionnelle' : on montrera qu'une certaine proposition *peut être dérivée à partir de* certaines autres. Toutes nos règles sauf PC et RAA présupposent qu'on a déjà démontré une ou plusieurs propositions et nous servent donc à établir des propositions à partir de certaines prémisses.

L'usage des prémisses nous permet d'éviter des substitutions. Pour montrer, par exemple, la commutativité de la conjonction, il nous suffit une simple preuve de quatre lignes :

1	$p \wedge q$	$\vdash\ p \wedge q$	prémisse
2	$p \wedge q$	$\vdash\ p$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$p \wedge q$	$\vdash\ q$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge q$	$\vdash\ q \wedge p$	de (2) et (3) par ($\wedge$**I**)

PC et RAA, de l'autre côté, nous permettent de démontrer des tautologies, c'est-à-dire des propositions dont les preuves n'ont pas besoin de prémisses. Pour démontrer "$\vdash p \rightarrow p$", par exemple, nous procédons comme suit :

1	p	$\vdash^*\ p$	supposition
2	p	$\vdash^*\ p$	(1)
3		$\vdash p \rightarrow p$	de (1) et (2) par (PC)

Dans la colonne à gauche, on énumère les lignes ; dans la deuxième, on met des prémisses (qu'il n'y a pas dans cet exemple) et des suppositions ; dans la troisième, ou bien "$\vdash^*$" (si on est en train de démontrer quelque proposition sous une supposition) ou bien "$\vdash$" (si on n'a pas fait de supposition ou déchargé toutes celles que l'on a fait) ; dans la quatrième colonne, la proposition principale ; dans la cinquième, finalement, la manière dont on est arrivé à la proposition principale : s'il s'agit d'une prémisse, d'une supposition ou de la conclusion d'une règle d'inférence.

Si on a des prémisses, on commence par les incorporer dans la preuve. Supposons que nous voulons prouver "$p \to r$" à partir des deux propositions "$p \to q$" et "$q \to p$". Nous commençons avec l'‘importation' de ces prémisses comme suit :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ q \to r$	prémisse

Cette règle correspond au fait qu'on a, dans un calcul hilbertien, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi$ pour toute formule $\phi \in \mathsf{Th}$. Puisque que nous cherchons à établir une conclusion conditionnelle (à savoir "$p \to r$"), nous supposons son antécédent :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ p$	supposition

Cette supposition nous permet d'appliquer (MP) : nous obtenons ainsi "q" – ce qui, avec la deuxième prémisse, nous permet la dérivation de "r" :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ q$	de (1) et (3) avec (MP)
5	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ r$	de (2) et (4) avec (MP)

Avec une application de la règle de la preuve conditionnelle, nous avons établi notre conclusion, à partir des deux prémisses originales, mais sous aucune supposition :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ q$	de (1) et (3) avec (MP)
5	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^*\ r$	de (2) et (4) avec (MP)
6	$p \to q, q \to r$	$\vdash\ p \to r$	de (3) et (5) avec (PC)

La dernière ligne nous assure maintenant que l'on peut prouver "$p \to r$" des deux prémisses "$p \to q$" et "$q \to r$".

Examinons une preuve qui utilise la règle de la réduction à l'absurde et essayons de déduire "$\neg(p \wedge q)$" à partir de "$p \to \neg p$". Nous commençons par l'importation de la prémisse et supposons la négation de la conclusion désirée :

1	$p \to \neg q$	$\vdash\ p \to \neg q$	prémisse
2	$p \to \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p \wedge q$	supposition

Sous cette supposition, nous cherchons à déduire une contradiction : (RAA) nous permettra alors de conclure que la supposition est fausse et qu'en conséquent sa négation est vraie :

1	$p \to \neg q$	$\vdash\ p \to \neg q$	prémisse
2	$p \to \neg q, p \wedge q$	$\vdash^{*}\ p \wedge q$	supposition
3	$p \to \neg q, p \wedge q$	$\vdash^{*}\ p$	de (2) par ($\wedge$**E**)
4	$p \to \neg q, p \wedge q$	$\vdash^{*}\ \neg q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to \neg q, p \wedge q$	$\vdash^{*}\ q$	de (2) par ($\wedge$**E**)
6	$p \to \neg q$	$\vdash\ \neg(p \wedge q)$	de (2), (4) et (5) par (RAA)

Il est souvent crucial de bien se servir de la règle de suppositions : elle nous permet de 'sortir' l'information que contiennent les prémisses. Pour pouvoir utiliser, par exemple, "$q \to r$" dans une preuve qui a "$p \to (q \to r)$" comme prémisse, on suppose "p". Le choix des règles est non seulement motivé par les prémisses qui sont à notre disposition, mais également par la conclusion désirée : si la conclusion désirée à la forme d'une implication, par exemple, on se servira de la règle de la preuve conditionnelle (PC). Dans le cas où la conclusion est une proposition simple ou une négation, on utilisera la réduction à l'absurde (RAA).

La règle de supposition nous permet de 'conditionaliser' n'importe quelle ligne dans notre preuve : si on a prouvé que q, par exemple, il suffit de supposer "p" pour dériver "$p \to q$" par la règle (PC). Il est donc aussi possible de supposer la même proposition plusieurs fois, par exemple pour prouver "$p \to (p \to q)$" :

1	$\neg(p \to (p \to q))$	$\vdash^{*}\ \neg(p \to (p \to q))$	supposition
2	$\neg(p \to (p \to q)), q$	$\vdash^{*}\ q$	supposition
3	$\neg(p \to (p \to q)), q, p$	$\vdash^{*}\ p$	supposition
4	$\neg(p \to (p \to q)), q, p, p$	$\vdash^{*}\ p$	supposition
5	$\neg(p \to (p \to q)), q, p$	$\vdash^{*}\ p \to q$	de (4) et (2) par (PC)
6	$\neg(p \to (p \to q)), q$	$\vdash^{*}\ p \to (p \to q)$	de (3) et (5) par (PC)
7	$\neg(p \to (p \to q))$	$\vdash^{*}\ \neg q$	de (2), (1) et (6) par (RAA)
8		$\vdash\ \neg\neg(p \to (p \to q))$	de (1), (1) et (7) par (RAA)
9		$\vdash\ p \to (p \to q)$	de (8) par (DN))

La règle d'élimination d'une disjonction ($\vee$**E**) a l'air un peu compliquée, mais correspond à un principe naturel de raisonnement. A partir d'une prémisse disjonctive, on peut démontrer n'importe quelle proposition dont la vérité ne dépend pas de notre choix de disjoint : une éventuelle ignorance de quel disjoint est vrai est égalisée par le fait que la conclusion s'ensuit des deux également. Si je sais que Marie fait sa fête aujourd'hui ou demain, mais que, de toute façon, je ne serai pas invité, alors je sais que je ne suis pas invité. Si vous êtes d'accord qu'ou bien il pleut ou bien il fait beau et que, s'il pleut, nous n'allons pas faire du sport aujourd'hui et que, s'il fait beau, il fait trop chaud et donc nous n'allons pas faire du sport aujourd'hui, alors on est d'accord que nous ne ferons pas du sport aujourd'hui. En utilisant la règle ($\vee$**E**), nous démontrons la commutativité de la disjonction comme suit :

1	$p \vee q$	$\vdash\ p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p$	$\vdash^{*}\ p$	supposition
3	$p \vee q, p$	$\vdash^{*}\ q \vee p$	de (2) par ($\vee$**I**)
4	$p \vee q, q$	$\vdash^{*}\ q$	supposition
5	$p \vee q, q$	$\vdash^{*}\ q \vee p$	de (4) par ($\vee$**I**)
6	$p \vee q$	$\vdash\ q \vee p$	de (1,2,3,4,5) par ($\vee$**E**)

Un dernier exemple nous montre comment nous servir de la règle (RAA) pour établir une conclusion positive :

1	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash\ \neg(\neg p \wedge \neg q)$	prémisse
2	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg(p \vee q)$	supposition
3	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^*\ p \vee q$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg p$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^*\ q$	supposition
7	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^*\ p \vee q$	de (6) par ($\vee$**I**)
8	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg q$	de (6), (2) et (7) par (RAA)
9	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg p \wedge \neg q$	de (5) et (8) par ($\wedge$**I**)
10	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash\ \neg\neg(p \vee q)$	de (2), (1) et (9) par (RAA)
11	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash\ p \vee q$	de (10) par (DN)

5 Le théorème de déduction

Nous remarquons l'importance cruciale de la règle de la preuve conditionnelle PC dans la déduction des théorèmes d'une forme implicative. La validité de la règle de la preuve conditionnelle correspond à un fait important sur la logique propositionnelle :

Théorème 1 (Théorème de déduction). *ψ peut être déduite de ϕ si et seulement si $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est un théorème.*

Preuve[3]

$\Longrightarrow$ Comme le théorème est évident pour la méthode de la déduction naturelle, nous le démontrons pour le calcul HC. Supposons donc que nous avons une preuve de

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^n \psi$$

Cette preuve consiste en une séquence fini de formules propositionnelles $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ telle que pour $\psi_n = \psi$ et pour tout nombre $i < n$, ψ_n est ou bien un axiome ou ϕ ou bien s'ensuit de deux autres formules ψ_i et ψ_j $(i, j < n)$ par MP. Nous transformons cette preuve de ψ en une preuve que $\phi \rightarrow \psi$ en faisant des modifications suivantes :

(a) Si $\psi_k = \phi$, nous remplaçons

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \rightarrow \phi$$

ce qui est un axiome ($\mathbf{H_1}$).

(b) Si ψ_k est un axiome, nous remplaçons la ligne

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par les cinq lignes suivantes (cf. exercice (5b) de la quatrième série) :[4]

[3] La preuve suivante, qui se termine par le signe "□" pour "quod erat demonstrandum" peut être omise par ceux peu intéressés en subtilités des calculs hilbertiens.

[4] Nous assumons que $k_1, \ldots, k_5 < k$, ce qui est toujours possible après une ré-numération des lignes.

$\mathbf{k_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k$	axiome
$\mathbf{k_2}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\psi_k \wedge \phi) \to \psi_k) \to (\psi_k \to (\phi \to \psi_k))$	$\mathbf{H_3}$
$\mathbf{k_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\psi_k \wedge \phi) \to \psi_k$	$\mathbf{H_8}$
$\mathbf{k_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k \to (\phi \to \psi_k)$	(MP) de (k_2) et (k_3)
$\mathbf{k_5}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_k$	(MP) de (k_1) et (k_4)

(c) Si ψ_k a été obtenue de deux formules ψ_i et $\psi_j = \ulcorner \psi_i \to \psi_k \urcorner$ $(i, j < k)$, on applique l'hypothèse d'induction pour obtenir :

i	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_i$
j	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi_k)$

Nous remplaçons ces deux lignes par les suivantes :

i	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_i$	
$\mathbf{j_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi_k)$	
$\mathbf{j_2}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to (\psi_i \to \psi_k)) \to ((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k)$	$\mathbf{H_4}$
$\mathbf{j_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k$	(MP) de (j_1) et (j_2)
$\mathbf{j_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \phi$	$\mathbf{H_1}$
$\mathbf{j_5}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to \phi) \to ((\phi \to \psi_i) \to (\phi \to (\phi \wedge \psi_i)))$	$\mathbf{H_{10}}$
$\mathbf{j_6}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to \psi_i) \to (\phi \to (\phi \wedge \psi_i))$	(MP) de (j_4) et (j_5)
$\mathbf{j_7}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\phi \wedge \psi_i)$	(MP) de (i) et (j_6)
$\mathbf{j_8}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to (\phi \wedge \psi_i)) \to (((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k) \to (\phi \to \psi_k))$	$\mathbf{H_2}$
$\mathbf{j_9}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k) \to (\phi \to \psi_k)$	(MP) de (j_7) et (j_8)
$\mathbf{j_{10}}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_k$	(MP) de (j_3) et (j_9)

$\Longleftarrow$ Si on a

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \to \psi$$

on rajoute

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+1} \phi$$

et on obtient

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+2} \psi$$

avec une application de (MP).

□

Par le théorème de déduction, le problème de trouver une déduction "$p \vdash q$" se réduit au problème de prouver "$\vdash p \to q$". En pratique, cependant, cette réduction ne facilite que rarement le travail du logicien. D'où vient l'utilité de la méthode de déduction naturelle, qui n'a pas besoin d'une telle réduction mais permet de traiter "$p \vdash q$" 'directement'.

6 Le statut des règles

La méthode de la déduction naturelle consiste essentiellement en les douze règles suivantes :

1. supposition : je peux supposer ce que je veux (si j'en tiens compte ensuite)
2. MP : si j'ai déjà "$p \to q$" et aussi "p", je peux écrire "q".
3. MT : si j'ai déjà "$p \to q$" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
4. PC : si j'ai supposé "p" et montré ensuite"q", je peux écrire "$p \to q$".
5. DN : si j'ai déjà "$\neg\neg p$", je peux écrire "p" ; si j'ai déjà "p", je peux écrire "$\neg\neg p$".
6. RAA : si j'ai supposé "p" et montré qu'il s'ensuit "q" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".

7. $\wedge$**I** : si j'ai déjà "p" et "q", je peux écrire "$p \wedge q$".
8. $\wedge$**E** : si j'ai déjà "$p \wedge q$", je peux écrire "p" et aussi écrire "q".
9. $\vee$**I** : si j'ai déjà "p", je peux écrire "$p \vee q$" ; si j'ai déjà "q", je peux écrire "$p \vee q$".
10. $\vee$**E** : si j'ai montré "$p \vee q$" et que "r" s'ensuit de "p" et que "r" s'ensuit de "q", je peux écrire "r".
11. $\leftrightarrow$ **I** : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow p$", je peux écrire "$p \leftrightarrow q$".
12. $\leftrightarrow$ **E** : si j'ai déjà "$p \leftrightarrow q$", je peux écrire "$p \rightarrow q$" et aussi écrire "$q \rightarrow p$".

Ces règles nous disent comment nous pouvons manipuler des séquences de symboles de la forme "$\phi \vdash \psi$", en composant une preuve d'un certain théorème ("$\vdash \chi$") ou d'une proposition à partir de quelques prémisses ("$\zeta \vdash \chi$"). Il est important de noter que ces règles nous donnent des permissions et ne nous obligent pas. La seule 'obligation' dont on peut parler en logique est celle d'éviter des erreurs dans l'application des règles données. Les règles elles-mêmes ne nous obligent à rien : elles nous donnent la permission de passer de certaines propositions à certaines autres.

C'est en ce sens-là que la logique ne traite pas de vérités, mais de connexions, surtout de connexions inférentiels, entre des propositions. Elle ne s'occupe point de comment est le monde, mais cherche à déterminer comment il peut ou doit être étant donné quelques autres propositions dont on prend la vérité pour accordé. L'usage des suppositions est, en conséquent, non seulement important pour la déduction naturelle, mais essentiel à la nature de la logique même.

7 Une notation en termes de déductibilité

Même en présence d'un théorème de déduction, il est important de distinguer des conclusions conditionnelles des théorèmes. Une conclusion conditionnelle a la forme suivante :

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \ \vdash \ \psi \tag{2}$$

Nous appellerons toute expression de la forme (2) un "séquent". Un séquent est un schéma d'une inférence ; (2) dit qu'à partir des prémisses $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$, on peut déduire ψ. Un théorème, cependant, est un séquent qui manque de prémisses :

$$\vdash \psi \tag{3}$$

(3) dit que ψ peut être prouvé sans aucune prémisse et que, en conséquent, ψ est un théorème. Ce sont des théorèmes qui, en premier lieu, sont appelées 'vraies' ou 'fausses' et les séquents qui sont proprement dites 'valides' ou 'invalides'. Il devient donc apparent maintenant que notre teste sémantique de validité correspond à un teste syntaxique de déductibilité. Nous avons dit qu'un argument de la forme "p ; q ; r ; donc s" est valide si et seulement si l'implication matérielle correspondante "$(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$" est une tautologie. Étant donné le théorème de déduction, ceci revient à dire qu'un séquent $\phi \vdash \psi$ peut être prouvé si et seulement si l'implication correspondante est un théorème : $\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$.

8 Les règles dérivées

Un grand avantage de la méthode de déduction naturelle est l'usage des règles dérivées. Examinons un exemple :

Au lieu de ($\vee$**E**), on aurait aussi pu choisir le syllogisme disjonctif (SD) pour éliminer la disjonction

"$\vee$" d'une formule :

m	$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (SD)

m	$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \phi$	de (m) et (n) par (SD)

Le syllogisme disjonctif correspond à un cas spécial de la règle ($\vee$**E**). Voici comment nous déduisons un cas particulier du syllogisme disjonctif, à savoir "$\neg p, p \vee q \vdash q$".

1	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	$\neg p$	prémisse
2	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	$p \vee q$	prémisse
3	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$\neg p \vee q$	de (1) par ($\vee$**I**)
5	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge q$	$\vdash^*$	$p \wedge \neg q$	supposition
6	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge q, \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
7	$\neg p, p \vee q, p, \neg p$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (5), (3) et (6) par (RAA)
8	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
9	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge q, q$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (5) par ($\wedge$**E**)
10	$\neg p, p \vee q, p, q$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (5), (8) et (9) par (RAA)
11	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (4, 6, 7, 8, 10) par ($\vee$**E**)
12	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	p	supposition
13	$\neg p, p \vee q, p, p, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
14	$\neg p, p \vee q, p, p, \neg q$	$\vdash^*$	$p \wedge \neg q$	de (12) et (13) par ($\wedge$**I**)
15	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg q$	de (13), (14) et (11) par (RAA)
16	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	q	de (15) par (DN)
17	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$p \rightarrow q$	de (13) et (16) par (PC)
18	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	q	de (3) et (17) par (MP)
19	$\neg p, p \vee q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
20	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	q	de (2, 3, 18, 9, 9) par ($\vee$**E**)

On remarquera que les preuves par la déduction naturelle ne sont pas forcément simples. Il n'étonne point, en conséquence, qu'étant donné cet effort nous aimerions bien réutiliser le résultat prouvé pour ce cas particulier, c'est-à-dire avoir à notre disposition la règle dérivée du syllogisme disjonctif en toute généralité. Le prochain méta-théorème nous donne le droit de procéder ainsi.

Mais d'abord il est nécessaire de définir ce qu'est une instance de substitution :

Définition 2. *Si ϕ est une formule bien formée de $\mathcal{L}$, ϕ' est une* instance de substitution *si et seulement si ϕ' est le résultat d'une substitution uniforme d'une ou de plusieurs propositions dans ϕ par d'autres propositions. Un séquent $\ulcorner\phi' \vdash \psi'\urcorner$ est une instance de substitution d'une autre séquent $\ulcorner\phi' \vdash \psi'\urcorner$ si et seulement si ϕ' et ψ' résultent de ϕ et ψ par une substitution uniforme d'une ou de plusieurs propositions dans ϕ ou dans ψ par d'autres propositions.*

Parmi les instances de substitution de "$p \vee \neg p$", par exemple, on trouve : "$q \vee \neg q$", "$(q \rightarrow r) \vee \neg(q \rightarrow r)$", "$(p \wedge \neg p) \vee \neg(p \wedge \neg p)$" etc. "$r \vee s \rightarrow p \vee \neg(\neg(r \vee s) \wedge p)$" est une instance de substitution de

"$p \to q \vee \neg(\neg p \wedge q)$" (substituant "$(r \vee s)$" pour "$p$" et "$p$" pour "$q$") et "$p \to (q \wedge r \to \neg s), p, \neg\neg s \vdash \neg(q \wedge r)$" est une instance de substitution de "$p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$" (substituant "$(q \wedge r)$" pour "$q$" et "$\neg s$" pour "$r$"), même si "$\neg s \to q \vee \neg(s \wedge q)$" ne l'est pas (puisque "$\neg s$" est substituée pour "p" et "s" pour "$\neg p$" et la substitution n'est donc pas uniforme).

Voici donc le méta-théorème qui nous donne droit aux règles d'inférence dérivées :

Théorème 3. *Si ϕ est un théorème de la déduction naturelle, toute instance de substitution de ϕ peut être prouvée. Si $\ulcorner \phi \vdash \psi \urcorner$ est un séquent prouvé, toute instance de substitution de $\ulcorner \phi \vdash \psi \urcorner$ peut être prouvée.*

PREUVE Il est évident que les règles d'inférence appliquées ne concerne que cette partie de la structure de ϕ et de ψ qui restent invariable sous la substitution. La preuve originale du théorème ou du séquent peut en conséquence transformé en une preuve de son instance de substitution. □

Grâce à ce théorème, nous pouvons donc désormais utiliser la règle du syllogisme disjonctif comme règle dérivé : Chaque fois que nous avons

m	$p \vee q, \neg p$	$\vdash$	r	

ou une instance de substitution de ce séquent, nous pouvons écrire pour la prochaine ligne :

n	$p \vee q, \neg p$	$\vdash$	q	de (m) par (SD)

La même chose vaut pour la conversion : Comme suite de

m	$p \to q$	$\vdash$	r	

ou d'une instance de substitution de ce séquent, nous pouvons écrire :

n	$p \to q$	$\vdash$	$\neg q \to \neg p$	de (m) par *conversion*

puisque "$p \to q \vdash \neg q \to \neg p$" peut être prouvé.

Une autre règle dérivée utile est l'application des lois de Morgan, dont nous prouvons un cas particulier comme suit :

1	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	prémisse
2	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	supposition
3	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
4	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q).\neg p$	$\vdash^*$	$\neg p \vee \neg q$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	p	de (5) par (DN)
7	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
8	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q).\neg q$	$\vdash^*$	$\neg p \vee \neg q$	de (7) par ($\vee$**I**)
9	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg\neg q$	de (7), (2) et (8) par (RAA)
10	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	q	de (9) par (DN)
11	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$p \wedge q$	de (6) et (10) par ($\wedge$**I**)
12	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	de (2), (1) et (11) par (RAA)
13	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	de (12) par (DN)

Nous avons donc prouvé le séquent "$\neg(p \wedge q) \ \vdash \ \neg p \vee \neg q$". Pour prouver le séquent converse, nous procédons comme suit :

1	$\neg p \vee \neg q$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	prémisse
2	$\neg p \vee \neg q, \neg p$	$\vdash$	$\neg p$	supposition
3	$\neg p \vee \neg q, \neg p, p \wedge q$	$\vdash$	$p \wedge q$	supposition
4	$\neg p \vee \neg q, \neg p, p \wedge q$	$\vdash$	p	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\neg p \vee \neg q, \neg p$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg p \vee \neg q, \neg q$	$\vdash$	$\neg q$	supposition
7	$\neg p \vee \neg q, \neg q, p \wedge q$	$\vdash$	$p \wedge q$	supposition
8	$\neg p \vee \neg q, \neg q, p \wedge q$	$\vdash$	q	de (7) par ($\wedge$**E**)
9	$\neg p \vee \neg q, \neg q$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (7), (6) et (8) par (RAA)
10	$\neg p \vee \neg q$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (1, 2, 5, 6, 9) par ($\vee$**E**)

Nous avons démontré l'interdéductibilité des deux propositions, c'est-à-dire établi que "$\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$" ce qui nous donne le droit d'utiliser cette loi de Morgan dans de futures preuves.

Il est à noter que l'application des règles dérivées présuppose la preuve des séquents ou théorèmes correspondants.