Septième leçon

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Philipp Keller

A lire pour le cours du 16 décembre 2003

1 Les propriétés métalogiques

Nous avons, dans la leçon 5, introduit une sémantique formelle pour le langage de la logique propositionnelle et définit la relation de conséquence sémantique $\models$. "$\phi \models \psi$" est vraie si et seulement si toute interprétation qui rend "ϕ" vraie rend également vraie "ψ". Dans les leçons 4, 5 et 6, nous avons introduit trois méthodes syntaxiques qui permettent de prouver des théorèmes : un calcul hilbertien, la méthode des arbres et la méthode de la déduction naturelle. Ces trois méthodes nous donnent trois relations syntaxiques de déductibilité $\vdash$.

La conséquence sémantique $\models$ est une relation sémantique qui est étudiée dans la théorie des modèles (qui définit la notion de 'validité'). La déductibilité syntaxique $\vdash$, par contre, est une relation syntaxique et fait partie du domaine de la théorie de la preuve (qui définit la notion de déductibilité ou prouvabilité). Il existe différentes manières d'établir un lien entre syntaxe et sémantique. Nous avons déjà établit un méta-théorème ("méta" parce qu'il ne s'agit pas de preuves *dans* un calcul, mais de preuves *sur* des calculs) sur le calcul hilbertien HC quand nous avons démontré un théorème de correction et prouvé que tout théorème de HC est une tautologie.

Nous devons maintenant étudier plus en détail et d'une manière plus générale les relations entre conséquence sémantique et déductibilité. Un calcul syntaxique peut être appelé :
– '**consistant**' s'il ne permet pas la déduction d'une contradiction.
– '**correct**' si tous ses théorèmes sont des tautologies.
– '**complet**' s'il permet la déduction de toutes les tautologies.
La première propriété est la moins exigeante : qu'une méthode syntaxique soit *consistante* revient à dire qu'elle ne permet pas la déduction d'une contradiction. Puisqu'une contradiction n'est jamais une tautologie, tout calcul correct est consistant. Dans la logique classique, un calcul inconsistant est dénué d'intérêt : si une seule contradiction peut être déduite, toute formule propositionnelle peut en être déduite en conséquence (puisqu'une inférence ayant une prémisse contradictoire est toujours valide) – le calcul, en conséquence, ne fera plus de distinction entre théorèmes et non-théorèmes et permettra la déduction de n'importe quelle proposition.

Nous avons déjà démontré que HC est correct. Nous démontrons dans la suite que la méthode des arbres et la méthode de la déduction naturelle sont correctes et complètes (et donc aussi consistante).

Une logique (ensemble de proposition appelées 'tautologies') peut être appelée :
– '**décidable**, s'il existe une procédure mécanique de déterminer si ou non une proposition est une tautologie.
– '**compacte**' si toute conséquence sémantique d'un ensemble infini de prémisses s'ensuit déjà d'un ensemble fini.
Nous démontrerons que la logique propositionnelle est décidable et qu'elle est compacte.

Tout d'abord nous allons démontrer également un théorème de déduction et prouver que $\ulcorner \phi \vdash \psi \urcorner$

si et seulement si $\ulcorner \vdash \phi \rightarrow \psi \urcorner$. Ceci nous facilitera la preuve de la complétude de la méthode de la déduction naturelle.

2 Le théorème de déduction

Nous remarquons l'importance cruciale de la règle de la preuve conditionnelle PC dans la déduction des théorèmes d'une forme implicative. La validité de la règle de la preuve conditionnelle correspond à un fait important sur la logique propositionnelle :

Théorème 1 (Théorème de déduction). *ψ peut être déduite de ϕ si et seulement si $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est un théorème.*

Preuve[1]

$\Longrightarrow$ Comme le théorème est évident pour la méthode de la déduction naturelle, nous le démontrons pour le calcul HC. Supposons donc que nous avons une preuve de

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^n \psi$$

Cette preuve consiste en une séquence finie de formules propositionnelles $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ telle que pour $\psi_n = \psi$ et pour tout nombre $i < n$, ψ_n est ou bien un axiome ou ϕ ou bien s'ensuit de deux autres formules ψ_i et ψ_j $(i, j < n)$ par MP. Nous transformons cette preuve de ψ en une preuve que $\phi \rightarrow \psi$ en faisant des modifications suivantes :

(a) Si $\psi_k = \phi$, nous remplaçons

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \rightarrow \phi$$

ce qui est un axiome ($\mathbf{H_1}$).

(b) Si ψ_k est un axiome, nous remplaçons la ligne

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par les cinq lignes suivantes (cf. exercice (5b) de la quatrième série) :[2]

$\mathbf{k_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k$	axiome
$\mathbf{k_2}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\psi_k \wedge \phi) \rightarrow \psi_k) \rightarrow (\psi_k \rightarrow (\phi \rightarrow \psi_k))$	$\mathbf{H_3}$
$\mathbf{k_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\psi_k \wedge \phi) \rightarrow \psi_k$	$\mathbf{H_8}$
$\mathbf{k_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k \rightarrow (\phi \rightarrow \psi_k)$	(MP) de (k_2) et (k_3)
$\mathbf{k_5}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow \psi_k$	(MP) de (k_1) et (k_4)

(c) Si ψ_k a été obtenue de deux formules ψ_i et ψ_j $(= \ulcorner \psi_i \rightarrow \psi_k \urcorner)$ $(i, j < k)$, on applique l'hypothèse d'induction pour obtenir :

i $\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow \psi_i$

j $\mathsf{HC} \vdash \phi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi_k)$

Nous remplaçons ces deux lignes par les suivantes :

[1] La preuve suivante, qui se termine par le signe "□" pour "quod erat demonstrandum" ("c.q.f.d.") peut être omise par ceux peu intéressés aux subtilités des calculs hilbertiens.

[2] Nous supposons que $k_1, \ldots, k_5 < k$, ce qui est toujours possible après une ré-numération des lignes.

i	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_i$	
$\mathbf{j_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi_k)$	
$\mathbf{j_2}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to (\psi_i \to \psi_k)) \to ((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k)$	$\mathbf{H_4}$
$\mathbf{j_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k$	(MP) de (j_1) et (j_2)
$\mathbf{j_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \phi$	$\mathbf{H_1}$
$\mathbf{j_5}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to \phi) \to ((\phi \to \psi_i) \to (\phi \to (\phi \wedge \psi_i)))$	$\mathbf{H_{10}}$
$\mathbf{j_6}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to \psi_i) \to (\phi \to (\phi \wedge \psi_i))$	(MP) de (j_4) et (j_5)
$\mathbf{j_7}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\phi \wedge \psi_i)$	(MP) de (i) et (j_6)
$\mathbf{j_8}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to (\phi \wedge \psi_i)) \to (((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k) \to (\phi \to \psi_k))$	$\mathbf{H_2}$
$\mathbf{j_9}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k) \to (\phi \to \psi_k)$	(MP) de (j_7) et (j_8)
$\mathbf{j_{10}}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_k$	(MP) de (j_3) et (j_9)

$\Longleftarrow$ Si on a

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \to \psi$$

on rajoute

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+1} \phi$$

et on obtient

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+2} \psi$$

avec une application de (MP).

□

Par le théorème de déduction, le problème de trouver une déduction "$p \vdash q$" se réduit au problème de prouver "$\vdash p \to q$". En pratique, cependant, cette réduction ne facilite que rarement le travail du logicien. D'où vient l'utilité de la méthode de déduction naturelle, qui n'a pas besoin d'une telle réduction mais permet de traiter "$p \vdash q$" 'directement'.

3 Correction et complétude de la méthode des arbres

Nous avons présenté la méthode des arbres à travers son interprétation sémantique, c'est-à-dire en termes de valeurs de vérité des propositions traitées. Cependant, les règles que nous avons données dans la leçon 5 sont des règles purement syntaxiques : elles ne considèrent que la forme syntaxique des propositions. Nous avons déjà présupposé déjà la correction et la complétude de cette méthode syntaxique et c'est ce que nous devons prouver dans la section qui suit.

Pour prouver la correction et la complétude de la méthode des arbres, nous devons introduire quelques nouvelles notions. Nous observons d'abord que nos règles pour les équivalences matérielles ne sont pas basiques, mais peuvent être obtenues par deux applications successives des règles pour l'implication matérielle. Les sept autres règles de construction d'arbres tombent sous deux catégories, celles qui nous disent de continuer avec une et celles qui nous disent de continuer avec deux branches. Nous faisons donc une distinction entre des formules que l'on appellera 'du type α', $\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \to \psi)\urcorner$, et les formules que l'on appellera 'du type β', $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$. On adoptera la terminologie suivante pour les formules que ces règles nous obligent d'écrire sur les branches consécutives :

α	α_1	α_2
$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	ϕ	ϕ
$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	ϕ	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$

β	β_1	β_2
$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	ψ

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un arbre ('tableau sémantique') :

Définition 2. *Un* tableau sémantique *est un arbre binaire (c'est-à-dire une structure composée de 'noeuds' (points) et de 'branches' (lignes) telle que chaque noeud sauf l'origine se trouve à la fin d'une branche et telle que tous les noeuds se trouvent au début d'au maximum deux branches) dont les noeuds sont des formules propositionnelles construites à partir d'une formule propositionnelle comme suit : si χ est une formule propositionnelle dont le tableau sémantique $\mathcal{T}$ a déjà été construit et ζ est un point final, nous élargissons $\mathcal{T}$ par une des méthodes suivantes :*

(A) Si un α a une occurrence sur le chemin B_ζ (le chemin de χ jusqu'à ζ dans $\mathcal{T}$), nous ajoutons ou bien α_1 ou bien α_2 comme successeur unique à ζ.

(B) Si un β a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons β_1 comme successeur gauche et β_2 comme successeur droite à ζ.

Nous appelons un tableau $\mathcal{T}$ une '*extension directe*' de $\mathcal{T}_2$ si nous obtenons $\mathcal{T}_2$ de $\mathcal{T}_2$ par une seule application de (A) ou de (B). Nous appelons une branche B_ϕ d'un arbre '*fermée*' si elle contient des occurrences d'une formule propositionnelle et aussi de sa négation. Un tableau $\mathcal{T}$ est appelé '*fermé*' si toutes ses branches sont fermées. Nous appelons une '*preuve*' d'une formule propositionnelle ϕ un tableau fermé pour $\ulcorner\neg\phi\urcorner$. Une formule ϕ est appelée '*prouvable*' s'il existe une preuve pour ϕ.

Pour la preuve de la correction, nous introduisons la notion d'une interprétation rendant vrais une branche ou un tableau :

Définition 3. *Une interprétation propositionnelle I* rend vraie *une branche B_ϕ d'un tableau sémantique ssi elle rend vraies toutes les formules propositionnelles qui ont des occurrences sur cette branche. I* rend vrai *un tableau ssi elle rend vraie au moins une branche de ce tableau.*

Nous pouvons maintenant prouver le théorème le plus important pour la preuve de la correction :

Théorème 4. *Si $\mathcal{T}_2$ est une extension directe d'un tableau $\mathcal{T}_1$, toute interprétation qui rend vraie $\mathcal{T}_1$ rend également vraie $\mathcal{T}_2$.*

Preuve Supposons que I rende vraie $\mathcal{T}_1$. Il y a donc une branche B_ϕ dans $\mathcal{T}_1$ rendue vraie par I. $\mathcal{T}_2$ se distingue de $\mathcal{T}_1$ par l'addition d'un ou de deux successeurs à une branche B_ψ de $\mathcal{T}_1$. Si B_ψ est différente de B_ϕ, alors B_ϕ est toujours une branche de $\mathcal{T}_2$ et la conclusion désirée s'ensuit. Si B_ψ a été obtenue de B_ϕ par l'opération (A), alors il se trouve une formule α sur B_ϕ telle que B_ψ est ou bien $B_\phi + \alpha_1$ ou bien $B_\phi + \alpha_2$. Mais α_1 et α_2 sont rendues vraies par I si α l'est, alors $\mathcal{T}_2$ contient au moins une branche rendue vraie par I. Si B_ψ a été obtenue de B_ϕ par l'opération (B), alors une formule β a une occurrence sur B_ϕ telle que et $B_\phi + \beta_1$ et $B_\phi + \beta_2$ sont des branches de $\mathcal{T}_2$. Si β est rendue vraie par I, alors ou bien la première ou bien la seconde de ces deux branches est également rendue vraie par I. Donc $\mathcal{T}_2$ est rendue vraie par I. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la correction de la méthode des arbres :

Théorème 5 (Correction de la méthode des arbres). *La méthode des arbres est correcte : toute proposition prouvable est une tautologie.*

Preuve Nous prouvons, par induction mathématique, que, pour tout tableau $\mathcal{T}$, si l'origine ϕ est rendue vraie par une interprétation I, alors $\mathcal{T}$ est également rendue vraie par cette interprétation. Ceci s'ensuit du théorème (4) qui nous assure le pas d'induction. Supposons alors que $\mathcal{T}$ prouve ϕ.

Ceci veut dire que $\mathcal{T}$ est un tableau analytique qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme origine et qui n'est pas rendu vrai sous aucune interprétation. Toute interprétation I, par conséquent, rend fausse $\ulcorner\neg\phi\urcorner$: $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est vraie sous aucune interprétation et donc une contradiction. ϕ est donc une tautologie. $\square$

Pour la complétude de la méthode des arbres, il faut distinguer deux questions :
– Pouvons-nous déduire, du fait qu'un tableau fermé existe pour ϕ, que ϕ est une tautologie ?
– Pouvons-nous être sûrs qu'un tableau fermé existe pour toute tautologie ?
Les deux questions sont indépendantes et seule la seconde correspond à celle de la complétude.[3]

Nous appelons une branche B_ϕ '*complète*' si ces deux conditions sont remplies :
– pour toute formule α qu'elle contient, elle contient et α_1 et α_2 ;
– pour toute formule β qu'elle contient, elle contient au moins un de β_1 et de β_2.
Nous appelons un tableau '*complet*' si toute branche de ce tableau est ou bien fermée ou bien complète. Notre but est de démontrer que

Si $\mathcal{T}$ est un tableau complet et ouvert, la formule à l'origine de $\mathcal{T}$ est consistante. **(C)**

Si nous réussissons à prouver (**C**), nous obtenons la complétude de la méthode des arbres comme suit :

Théorème 6 (Complétude de la méthode des arbres). *La méthode des arbres est complète : toute tautologie est prouvable.*

PREUVE Supposons que ϕ soit une tautologie. Si ϕ ne pouvait pas être déduite, il y aurait un tableau complet pour $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ qui reste ouvert. Par (**C**), $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ serait consistante, donc ne serait pas une contradiction et ϕ, par conséquent, ne serait pas une tautologie. Puisqu'on a présupposé que ϕ est une tautologie, la supposition doit être rejetée et ϕ est donc prouvable. $\square$

Pour prouver (**C**), nous démontrons le théorème suivant. De (7), (**C**) s'ensuit, puisque la consistance de toute la branche implique la consistance de son origine.

Théorème 7. *Toute branche ouverte et complète d'un tableau est consistant.*

PREUVE Supposons que B_ϕ soit une branche ouverte et complète d'un tableau $\mathcal{T}$ et que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble de toutes les propositions qui ont des occurrences sur B_ϕ. Puisque B_ϕ est une branche ouverte et grâce à nos règles de construction d'arbres (A) et (B), l'ensemble $\mathcal{E}$ satisfait les trois conditions suivantes :

(a) $\mathcal{E}$ ne contient pas de proposition simple "p" et sa négation "$\neg p$".

(b) Si $\alpha \in \mathcal{E}$, alors $\alpha_1 \in \mathcal{E}$ et $\alpha_2 \in \mathcal{E}$.

(c) Si $\beta \in \mathcal{E}$, alors $\beta_1 \in \mathcal{E}$ ou $\beta_2 \in \mathcal{E}$.

On appelle un ensemble qui satisfait ces trois conditions un 'ensemble de Hintikka'. Nous prouvons maintenant que tout ensemble de Hintikka est consistant :[4] Nous argumentons que tout ensemble de Hintikka peut être élargi à (est un sous-ensemble d') un ensemble saturé. Un ensemble $\mathcal{E}'$ est dit '*saturé*' s'il satisfait les conditions suivantes :

(a') Pour toute proposition ϕ, ou bien $\phi \in \mathcal{E}'$ ou bien $\ulcorner\neg\phi\urcorner \in \mathcal{E}'$, mais pas les deux.

(b') Pour toute proposition du type α, $\alpha \in \mathcal{E}'$ si et seulement si $\alpha_1 \in \mathcal{E}'$ et $\alpha_2 \in \mathcal{E}'$.

(c') Pour toute proposition du type β, $\beta \in \mathcal{E}'$ si et seulement si $\beta_1 \in \mathcal{E}'$ ou $\beta_2 \in \mathcal{E}'$.

Pour montrer qu'il y a un ensemble saturé $\mathcal{E}'$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, nous devons ajouter assez de propositions à $\mathcal{E}$

[3] Pour voir ceci, il suffit de s'imaginer que nous renonçons à quelques-unes de nos règles de construction d'arbres. Même si la méthode devenait ainsi incomplète, la réponse à la première question serait toujours affirmative.

[4] En fait, il suffisait de montrer la consistance de tout ensemble de Hintikka qui est *fini*.

(i) pour que les implications dans (b) et (c) puissent être transformées en les équivalences dans (b') et (c')

(ii) et pour que (a) soit vraie non seulement pour les propositions simples mais pour toutes les propositions.

Supposons que $\mathcal{E}$ est un ensemble de Hintikka. Nous devons trouver une interprétation qui rende vraies toutes les propositions dans $\mathcal{E}$. Nous la définissons comme suit :

$$I(\text{“}p\text{”}) := \begin{cases} \mathbf{v} & \text{“}p\text{”} \in \mathcal{E} \\ \mathbf{f} & \text{“}\neg p\text{”} \in \mathcal{E} \\ \text{un de } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{f} & \text{“}p\text{”} \notin \mathcal{E} \ \wedge \ \text{“}\neg p\text{”} \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

Par la condition (a), il n'arrive pas que I attribue deux valeurs de vérité différentes à une et la même proposition simple. Comment pouvons-nous montrer que I rend vraie toute proposition dans $\mathcal{E}$? Nous attribuons à chaque proposition un degrés selon la définition suivante :

Définition 8. *Le degrés d'une proposition ϕ est le nombre naturel déterminé par les règles suivantes :*

(1) Si ϕ est une proposition atomique, alors son degrés est 0.

(2) Si ϕ est une proposition niée $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et le degrés de ψ est n, alors son degrés est $n+1$.

(3) Si ϕ est une conjonction $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, une disjonction $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, une implication $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou une équivalence $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ et si le degrés de ψ est n et le degrés de χ est m, alors le degrés de ϕ est $n+m+1$.

L'utilité principale de cette définition[5] est qu'elle nous permet de faire prouver des propositions qui parlent de toutes les formules propositionnelles par induction mathématique.

Nous démontrons par induction mathématique que I rend vraies toutes les propositions dans $\mathcal{E}$:

base de l'induction : Nous avons déjà vu que I rend vraies toutes les propositions simples (de degrés 0) dans $\mathcal{E}$.

pas de l'induction : Supposons que I rende vraie toute proposition ϕ dans $\mathcal{E}$ de degrés moins que n. Si ϕ est d'un degrés plus que 0, ϕ doit être une formule α ou une formule β :

- α **:** Si ϕ est du type α, alors α_1 et α_2 sont aussi dans $\mathcal{E}$. Mais ces formules sont d'un degrés moins que 0, donc elles sont rendues vraies par I. Donc ϕ doit être vraie aussi.
- β **:** Si ϕ est du type β, alors ou bien β_1 ou bien β_2 est un membre de $\mathcal{E}$. Quelle qu'elle soit, elle doit être rendue vraie par I. Donc ϕ est aussi rendue vraie par I.

□

4 Correction et complétude de la déduction naturelle

Pour montrer la correction et la complétude de la méthode de la déduction naturelle il faut prouver que tout séquent déductible “$\phi \vdash \psi$” correspond à une relation de conséquence sémantique “$\phi \models \psi$” (correction) et que toute instance d'une telle relation correspond à un séquent déductible à l'aide de nos douze règles de déduction naturelle. Nous ignorons dans la suite les règles d'introduction et d'élimination de l'équivalence, traitant $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ comme abréviation de $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\urcorner$.

Théorème 9 (Correction de la déduction naturelle). *La méthode de la déduction naturelle est correcte : tout séquent déductible est une conséquence sémantique.*

[5] Voici quelques exemples : “$p \wedge (q \vee \neg r)$” est de degré 3, “$p \wedge (q \vee r)$” est de degré 2, “$p \wedge (q \wedge (r \vee \neg s))$” est de degré 4 etc.

Preuve Nous avons remarqué que toute preuve par la méthode de la déduction naturelle (en bref : toute déduction naturelle) doit commencer par une application de la règle de suppositions. C'est pourquoi nous pouvons prouver la correction par une induction par rapport à la longueur n d'une preuve de $\ulcorner \phi \vdash \psi \urcorner$.

base de l'induction Si la preuve à la longueur 1, il s'agit d'une application de la règle de suppositions. Le séquent en question a donc la forme $\ulcorner \phi \vdash \phi \urcorner$ et nous savons de la leçon 3 que la relation de conséquence sémantique est réflexive.

pas de l'induction Supposons que nous avons montré la correction pour toutes les étapes d'une preuve jusqu'au pas n et considérons le pas $n+1$. Pour montrer la correction de ce pas $n+1$, il suffit de montrer la validité des neuf différentes règles d'inférence que nous aurions pu utiliser pour y arriver.

MP : Supposons le contraire de ce que nous voulons prouver : que $\models \phi$, $\models \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$, $\vdash \psi$, mais $\not\models \psi$. Il y aurait, par conséquent, une interprétation I qui rend vraie ϕ et $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ et rend fausse ψ. Nous savons, par la table de vérité de "$\rightarrow$", que ceci n'est pas possible.

MT : Ceci s'ensuit également de la table de vérité de "$\rightarrow$".

PC : Supposons que $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$, mais que $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \not\models \ulcorner \phi_{n+1} \rightarrow \psi \urcorner$. Il y aurait donc une interprétation I qui rend vraies tous les membres de $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$, mais faux $\ulcorner \phi_{n+1} \rightarrow \psi \urcorner$. Ceci est contradictoire puisqu'I, par la table de vérité de "$\rightarrow$", devrait rendre vraie ϕ_{n+1} et rendre faux ψ et servirait donc comme contre-exemple à "$\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$".

DN : Ceci s'ensuit de la table de vérité de "$\neg$".

RAA : Supposons que nous avons $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$, $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \ulcorner \neg\psi \urcorner$, mais $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \not\models \ulcorner \neg\phi_{n+1} \urcorner$. Il y aurait donc une interprétation I qui rend vraie tous les membres de $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$, rendait fausse $\ulcorner \neg\phi_{n+1} \urcorner$ et donc rendait vraie ϕ_{n+1}. Elle devrait donc rendre vraie et ψ et $\ulcorner \neg\psi \urcorner$, ce qui est impossible.

$\wedge$**I** : Si toute interprétation rendait vraie ϕ et ψ, alors toute interprétation rendra également vraie $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$.

$\wedge$**E** : Si toute interprétation rendait vraie $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, alors toute interprétation rendra également vraie ϕ et ψ.

$\vee$**I** : Si toute interprétation rendait vraie ϕ, alors toute interprétation rendra également vraie $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$.

$\vee$**E** : Supposons encore une fois le contraire de ce que nous voulons prouver : $\models \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$, $\phi \models \chi$, $\psi \models \chi$, mais $\not\models \chi$. Il y aurait donc une interprétation I qui rend fausse χ, mais vraie $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$. Elle doit donc rendre vrai un des disjoints et, puisqu'on a $\phi \models \chi$ et $\psi \models \chi$, rendre également vraie χ, ce qui est contraire à notre supposition initiale.

□

Théorème 10 (Complétude de la déduction naturelle). *La méthode de la déduction naturelle est complète : toute conséquence sémantique est déductible en tant que séquent.*

Preuve Nous prouvons d'abord la complétude sous une forme plus 'classique' :

Toute tautologie est déductible par la méthode de la déduction naturelle. (**Compl**)

Pour démontrer (**Compl**), nous prouvons d'abord le lemme suivant : Soit ϕ une formule qui contient les propositions simples $p_1, \ldots, p_n$ et I une interprétation. Nous définissons des formules $\psi_1, \ldots, \psi_n$ comme suit :

$$\psi_i := \begin{cases} (\text{“}p_i\text{”}) & I(\text{“}p_i\text{”}) = \mathbf{v} \\ (\text{“}\neg p_i\text{”}) & I(\text{“}p_i\text{”}) = \mathbf{f} \end{cases}$$

Nous démontrons alors que, par la méthode de la déduction naturelle,

1. si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors nous pouvons déduire $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$;
2. si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors nous pouvons déduire $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$;

Nous démontrons ceci par une induction mathématique, utilisant la notion de degrés déjà introduite :

base de l'induction Soit ϕ de degrés 0 (et donc une proposition atomique). Si $I(\phi) = \mathbf{v}$, nous avons $\psi = \phi$ et $\psi \vdash \phi$ par la règle de suppositions. Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, nous avons $\psi = \ulcorner\neg\phi\urcorner$ et également $\psi \vdash \neg\phi$ par la règle de suppositions.

pas de l'induction Soit ϕ de degrés n.

1. Si $\phi = \ulcorner\neg\xi\urcorner$, ξ est de degrés $< n$.
   – Si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ et donc (par l'hypothèse de l'induction) $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$.
   – Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ et donc (par l'hypothèse de l'induction) $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \xi$. Nous obtenons $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \ulcorner\neg\neg\xi\urcorner$ par une application de (DN).
2. Si $\phi = \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degrés $< n$ et
   – Si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{v}$. Nous avons donc, par l'hypothèse de l'induction :

$$\begin{array}{ll} \psi_1, \ldots, \phi_m & \vdash \xi \\ \psi_{m+1}, \ldots, \psi_n & \vdash \chi \end{array}$$

   et nous devons montrer que

$$\psi_1, \ldots, \phi_n \quad \vdash \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$$

   Mais ceci s'ensuit par une application de ($\wedge$**I**).
   – Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ ou $I(\chi) = \mathbf{f}$. Voici les trois cas :

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \xi$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \chi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (4) par (RAA)

1	$\psi_1, \ldots, \psi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \chi$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \psi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (1) et (4) par (RAA)

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \chi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (4) par (RAA)

3. Si $\phi = \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degrés $< n$ et
   – Si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ ou $I(\chi) = \mathbf{v}$. Dans les trois cas, nous utilisons ($\vee$**I**).

– Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$. La déduction sera la suivante

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner, \xi$	$\vdash^* \xi$	supposition
5	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \xi$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (1) et (4) par (RAA)
6	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner, \chi$	$\vdash^* \chi$	supposition
7	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \chi$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (6) par (RAA)
8	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3, 4, 5, 6, 7) par ($\vee$**E**)
9	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (3) et (8) par (RAA)

4. Si $\phi = \ulcorner\xi \to \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degrés $< n$ et
   – Si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ ou $I(\chi) = \mathbf{v}$. Si $I(\chi) = \mathbf{v}$, nous supposons ξ et appliquons (PC). Dans l'autre cas $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$, nous supposons χ et ξ, appliquons (PC) et enlevons la supposition que χ par (RAA).
   – Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ et $I(\chi) = \mathbf{f}$. Nous supposons $\ulcorner\xi \to \chi\urcorner$, appliquons (MP) et utilisons (RAA) pour nier la supposition.
5. Si $\phi = \ulcorner\xi \leftrightarrow \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degrés $< n$ et
   – Si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{v}$ ou $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$. Dans ce cas, nous utilisons (PC) et après ($\leftrightarrow$ **I**).
   – Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ et $I(\chi) = \mathbf{v}$ ou $I(\xi) = \mathbf{v}$ et $I(\chi) = \mathbf{f}$. Nous supposons $\ulcorner\xi \leftrightarrow \chi\urcorner$, appliquons ($\leftrightarrow$ **E**), appliquons (MP) et utilisons (RAA) pour nier la supposition.

Nous avons donc prouvé le lemme, c'est-à-dire démontré le suivant : Si I est une interprétation des propositions simples contenues dans une proposition complexe, nous pouvons déduire, par la méthode de la déduction naturelle, que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ si $I(\phi) = \mathbf{v}$ et $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$ si $I(\phi) = \mathbf{f}$, pour les propositions simples et leurs négations de la ligne correspondante de la table de vérité.

Supposons maintenant que ϕ est une tautologie et que ϕ contient les propositions simples "p_1", …, "p_n". Nous pouvons donc déduire tous les 2^n séquents de la forme $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ Pour déduire ϕ, nous procédons comme suit :

1. Nous démontrons toutes les n disjonctions $\ulcorner\psi_i \vee \neg\psi_i\urcorner$ (en supposant qu'elles sont fausses, ($\vee$**I**) et (RAA).
2. Nous faisons $2n$ suppositions : ψ_1, $\ulcorner\neg\psi_1\urcorner$, ψ_2, $\ulcorner\neg\psi_2\urcorner$, $\ldots\psi_n$, $\ulcorner\neg\psi_n\urcorner$.
3. Nous répétons les 2^n preuves de ϕ pour toutes les différentes interprétations possibles.
4. Nous appliquons $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$ fois ($\vee$**E**) et obtenons une preuve de ϕ sous aucune supposition.

Comme ϕ était une tautologie arbitraire, nous avons prouvé (**Compl**). Pour passer des théorèmes $\vdash \phi$ à des séquents arbitraires $\phi \vdash \psi$, supposons que ψ est une conséquence sémantique de $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. Nous devons donc montrer que nous pouvons prouver le séquent $\phi_1, \ldots \phi_n \vdash \psi$. Par la définition de conséquence sémantique, nous savons que $\ulcorner\phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots(\phi_n \to \psi))\ldots)\urcorner$ est une tautologie et par (**Compl**) nous le pouvons donc déduire par la méthode de la déduction naturelle. Le théorème de déduction nous dit alors que nous pouvons également prouver le séquent en question. □

Voici un exemple pour illustrer le fonctionnement de la 'preuve canonique' décrite en-dessus. Soit ϕ la tautologie "$(p \wedge q) \to p$". Comme première étape, nous prouvons les disjonctions des atomes concernés :

1	$\vdash p \vee \neg p$	déjà prouvé
2	$\vdash q \vee \neg q \to p$	déjà prouvé

Le deuxième pas est de supposer toutes les atomes et leurs négations :

3	p	$\vdash^*$	p	supposition
4	$\neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
5	q	$\vdash^*$	q	supposition
6	$\neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition

Troisièmement, le lemme nous donne les quatre lignes suivantes :

7	p, q	$\vdash^*$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
8	$p, \neg q$	$\vdash^*$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
9	$\neg p, q$	$\vdash^*$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
10	$\neg p, \neg q$	$\vdash^*$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	lemme

Nous pouvons donc appliquer $\vee$**E** :

11	q	$\vdash^*$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	de (1,3,7,4,9) par ($\vee$**E**)
12	$\neg q$	$\vdash^*$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	de (1,3,8,4,10) par ($\vee$**E**)
13		$\vdash$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	de (2,5,11,6,12) par ($\vee$**E**)

5 Décidabilité et formes normales

Le problème de décidabilité est le suivant : comment savoir si une formule donné ϕ est une tautologie ? Comment savoir si une formule $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ est consistante ? Pour répondre à ces questions, il nous faut une procédure de décision : un algorithme qui décide pour une proposition donnée si ou non il existe une interprétation qui la rend vraie.

Les tables de vérité nous donnent une méthode 'brute' de trouver une telle interprétation, s'il y en a. Pour savoir si ou non une proposition donnée est une tautologie, il suffit de faire sa table de vérité et vérifier si on ne trouve que des "V" dans la colonne de son connecteur principale. Le théorème suivant est donc trivial :

Théorème 11 (Décidabilité de la logique propositionnelle). *La logique propositionnelle est décidable : il existe une procédure mécanique de déterminer si ou non une formule propositionnelle est une tautologie.*

Preuve Toute formule propositionnelle ne contient qu'un nombre fini de propositions simples. Pour déterminer si ou non ϕ est une tautologie, il suffit de faire la table de vérité selon ces propositions simples et vérifier s'il y a des "F" dans la colonne du connecteur principal de ϕ. □

Le désavantage de cette méthode est que les tables de vérité peuvent devenir très grandes. Pour une proposition complexe qui est construites de n atomes différents, il faut considérer 2^n lignes (4 pour 2, 8 pour 3, 16 pour 4, 32 pour 5, 64 pour 6 etc.). Pour une proposition qui contient dix propositions simples, il faudrait faire une table avec 1024 lignes !

On appelle ceci le 'problème de l'explosion combinatoire' lorsqu'on utilise directement la définition de la validité et on vérifie, pour tout I, si ou non $I(\phi) = \mathbf{v}$. En ne considérant que les n propositions simples apparaissant dans ϕ, le nombre de vérifications est exponentiel en n (la table de vérité pour ϕ aura 2^n lignes). Les tables de vérité, cependant, suggèrent une autre méthode. Considérons la table de vérité suivante :

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\mathbf{A}$	$\neg r$	$\mathbf{B}$	$\neg p$	$q \vee r$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{D}$	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$
V	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*
V	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*
F	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*

Chaque ligne de cette table nous apprend que la proposition complexe prend la valeur "*V*" ou "*F*" selon la valeur des atomes sur cette lignes. L'expression "$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$" est donc vraie si et seulement si "p", "q", "r", "s" sont toutes vraies (1ère ligne) *ou* si "p", "q" et "r" sont vraies et "s" est fausse (2ème ligne) *ou* si "p" et "q" sont vraies et "r" et "s" sont fausses (3ème ligne) *ou* "p", "r" et "s" sont vraies et "q" fausse (5ème ligne) *ou* "p" et "r" sont vraies et "q" et "s" sont fausses (6ème ligne) *ou* "p" et "s" sont vraies et "q" et "r" sont fausses (7ème ligne). Si nous traduisons cette observation en une langue formelle, nous obtenons :

$$(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \\ \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \quad (1)$$

Cette expression a une forme particulière :
– les négations n'apparaissent que devant des propositions simples ;
– l'expression est une disjonction de conjonctions
– chaque disjoint correspond à une ligne de la table de vérité où la proposition entière est vraie
On appelle des propositions ayant cette forme des *formes normales disjonctives.*

Si nous considérons un grand ensemble de formules bien formées d'une certaine langue et nous essayons de déterminer des propriétés communes à ces formules (par exemple : nous voulons savoir si toutes les formules dérivables dans un certain calcul sont valides), il est important de savoir si on peut présupposer quelque chose sur la *forme* de ces formules. Ainsi se justifie l'intérêt dans ce qu'on appelle des '*formes normales*'. Ces formes normales être définies d'une manière syntaxique.

Pour définir des formes normales, nous utilisons l'interdéfinissabilité des connecteurs. Commençons par la *forme normale négative*. Une formule ϕ est en forme normale si et seulement si ou bien elle est de la forme p ou $\neg p$ pour une proposition atomique p ou bien si elle est une disjonction ou une conjonction des formules qui sont dans une forme normale négative. Pour former la forme normale négative d'une formule, on 'pousse' la négation à l'intérieur de la formule en appliquant, d'une manière successive, les règles suivantes :

$$\phi \leftrightarrow \psi \quad \rightsquigarrow \quad (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) \quad (2)$$

$$\phi \rightarrow \psi \quad \rightsquigarrow \quad \neg\phi \vee \psi \quad (3)$$

$$\neg(\phi \wedge \psi) \quad \rightsquigarrow \quad \neg\phi \vee \neg\psi \quad (4)$$

$$\neg(\phi \vee \psi) \quad \rightsquigarrow \quad \neg\phi \wedge \neg\psi \quad (5)$$

$$\neg\neg\phi \quad \rightsquigarrow \quad \phi \quad (6)$$

Il ne faut passer à la prochaine règle que quand la première règle n'est plus applicable.

Le résultat qu'on obtient par l'application de ces règles est équivalent (sémantiquement) à la formule initiale, c'est-à-dire a la même table de vérité. Un exemple d'une telle transformation est la chaîne d'équivalences suivante :

$$
\begin{array}{lll}
(p \leftrightarrow q) \rightarrow r & & \\
 & ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow r & \text{règle 1} \\
 & \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r & \text{règle 2} \\
 & \neg((\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r & \text{règle 2} \\
 & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r & \text{règle 2} \\
 & \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r & \text{règle 3} \\
 & (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r & \text{règle 4} \\
 & (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \vee r & \text{règle 4} \\
 & (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r & \text{règle 5}
\end{array}
$$

Le résultat est en forme normale négative parce que tous les signes de négations se trouvent devant des propositions atomiques.

La forme normale négative nous permet de construire des formes normales conjonctives :

Définition 12. *Une formule est en* forme normale conjonctive *si elle est une conjonction de disjonctions de propositions atomiques et de négations de propositions atomiques.*[6]

L'importance de cette notion vient du fait que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule en forme normale conjonctive :

Théorème 13. *Si ϕ est une formule propositionnelle, il y a une formule ψ en forme normale conjonctive qui est sémantiquement équivalente à ϕ.*

Preuve Pour transformer une formule en forme normale conjonctive, on applique successivement les règles suivantes :

$$
\begin{array}{rcll}
\phi & \leadsto & \text{forme normale négative de } \phi & \\
(\phi \wedge \psi) \vee \chi & \leadsto & (\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi) & (1) \\
\chi \vee (\phi \wedge \psi) & \leadsto & (\chi \vee \phi) \wedge (\chi \vee \psi) & (2) \\
\phi \vee (\psi \vee \chi) & \leadsto & (\phi \vee \psi) \vee \chi & (3) \\
\phi \wedge (\psi \wedge \chi) & \leadsto & (\phi \wedge \psi) \wedge \chi & (4)
\end{array}
$$

Il est évident que le résultat que l'on obtient par l'application de ces règles est équivalent (sémantiquement) à la formule initiale, c'est-à-dire a la même table de vérité. □

[6] Pour dire ceci d'une manière plus formelle, on introduit la notation suivante :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \ := \ \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$$

pour des ensembles finis de formules $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. On appelle alors un 'littéral' une formule qui est ou bien une proposition atomique (= de la forme p) ou bien la négation d'une proposition atomique (= de la forme $\neg p$). On a pour une formule ϕ :

$$\phi \text{ est en forme normale conjonctive} \quad :\Longleftrightarrow \quad \phi \text{ est de la forme } \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$$

pour des nombres naturels m et $n_1, \ldots n_m$ et des littéraux $L_{i,j}$ tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n_i$.

Un exemple d'une telle transformation en forme conjonctive est la chaîne d'équivalences suivante :

$$
\begin{array}{cr}
((p \vee \neg q) \rightarrow ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u & \\
(\neg(p \vee \neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u & \text{règle 2} \\
((\neg p \wedge \neg\neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u & \text{règle 4} \\
((\neg p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u & \text{règle 5} \\
((\neg p \wedge q) \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 6} \\
((\neg p \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t)))) \wedge \neg u & \text{règle 6} \\
((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 7} \\
((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 7} \\
((\neg p \vee r) \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 8} \\
((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 8} \\
((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u & \text{règle 8} \\
((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge ((q \vee s) \vee t)) \wedge \neg u & \text{règle 8} \\
((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t) \wedge ((q \vee r) \vee t)) \wedge ((q \vee s) \vee t) \wedge \neg u & \text{règle 9}
\end{array}
$$

Nous voyons que les règles 8 et 9 ne servent qu'à grouper les conjonctions ou disjonctions d'une manière uniforme du côté gauche de sorte que, selon notre convention, on peut laisser tomber les parenthèses. Le résultat final de notre transformation est donc la formule :

$$(\neg p \vee r \vee t) \wedge (\neg p \vee s \vee t)) \wedge (q \vee r \vee t) \wedge (q \vee s \vee t) \wedge \neg u$$

L'intérêt des formes normales conjonctives vient du fait qu'il est très facile de tester – mécaniquement – si une formule en forme normale conjonctive est valide : il faut juste que tous ses conjoints soient valides ; mais ces conjoints sont des disjonctions – et pour qu'une disjonction soit valide, il faut qu'au moins une proposition atomique soit affirmée et niée dans la disjonction. La formule considérée n'est donc pas valide, mais cette autre l'est :

$$(\neg p \vee r \vee p) \wedge (\neg t \vee s \vee t)) \wedge (q \vee \neg q \vee t) \wedge (q \vee s \vee \neg s)$$

Il est aussi possible de définir une forme normale disjonctive : une formule est en *forme normale disjonctive* si elle est une disjonction de conjonctions de propositions atomiques et de leur négations.[7] La forme normale disjonctive d'une formule revient à énumérer, en les ajoutant les uns aux autres par la disjonction, les cas de vérité de la proposition complexe en question, tels que les indique sa table de vérité. Par exemple, la table de vérité d'une implication matérielle indique que celle-ci est vraie si et seulement si l'on a "p" et "q" vraie, ou "p" fausse et "q" vraie, ou "p" et "q"

[7] Pour dire ceci d'une manière plus formelle, on introduit la notation suivante :

$$\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i \;:=\; \phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n$$

Alors on a, pour une formule ϕ :

$$\phi \text{ est en forme normale disjonctive} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \phi \text{ est de la forme } \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$$

Dans les règles, il faut remplacer les règles 6 et 7 par les suivantes :

$$
\begin{array}{lcl}
(\phi \vee \psi) \wedge \chi & \rightsquigarrow & (\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi) \\
\chi \wedge (\phi \vee \psi) & \rightsquigarrow & (\chi \wedge \phi) \vee (\chi \wedge \psi)
\end{array}
$$

fausse – la forme disjonctive d'une implication "$p \to q$" sera donc "$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$".

6 La compacité de la logique propositionnelle

Nous avons définit la conséquence logique et la déductibilité avec des ensembles de prémisses qui sont potentiellement infinis. Nous pouvons donc maintenant poser la question si la consistance d'un ensemble infini de propositions peut être réduite à la consistance d'un sous-ensemble fini. Le théorème de compacité répond par l'affirmative à cette question :

Théorème 14. *La logique propositionnelle est compacte : $\Gamma \models \phi$ si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que $\Gamma' \models \phi$.*

Par conversion, ce théorème nous dit que si tous les sous-ensembles Γ' d'un ensemble Γ sont consistants, alors Γ sera également consistant. Les différentes interprétations qui rendent vraies les différentes sous-ensembles finis peuvent être combinées en une interprétation qui rend vraies toutes les propositions dans l'ensemble infini. Pour la preuve du théorème de compacité par la méthode de tableaux analytiques, nous prouvons d'abord un résultat qui s'applique à des arbres quelconques.

Appelons un arbre 'généré d'une manière finie' si et seulement si chaque noeud dans l'arbre n'a qu'un nombre fini de successeurs. Tous les arbres binaires, par exemple, sont donc des arbres générés d'une manière finie. Appelons une branche 'infinie' si et seulement si elle contient un nombre infini de noeuds. Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 15 (Le lemme de König). *Si un arbre qui est généré d'une manière finie contient un nombre infini de noeuds, il contient une branche infinie.*

Preuve Appelons un noeud 'sympa' s'il a et seulement s'il a un nombre infini de noeuds comme successeurs et 'méchant' autrement. Par l'antécédent de l'implication, il y a un nombre infini de noeuds et ils sont tous des successeurs de l'origine et donc l'origine est sympa. Nous observons aussi que si tous les successeurs d'un noeud sont méchants, alors ce noeud doit aussi être méchant (puisque l'arbre est généré d'une manière finie). Par conséquent, l'origine doit avoir un successeur sympa, qui, à son tour, a un successeur sympa et ainsi de suite. Puisque tout noeud sympa doit avoir un successeur sympa, nous générons ainsi une branche infinie.[8] □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la compacité de la logique propositionnelle :

Preuve [Preuve de la compacité de la logique propositionnelle] Supposons que tous les sous-ensembles finis d'un ensemble Γ sont consistants. Supposons que Γ nous est donné comme une séquence (et non seulement un ensemble) de formules propositionnelles $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots\}$ étant telle que, pour tout n, l'ensemble $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ est consistant. Ceci est possible parce qu'il s'agit d'un sous-ensemble de Γ. Construisons le tableau analytique pour ϕ_1. Ce tableau ne peut pas être fermé, puisque ϕ_1 est consistant. Nous ajoutons maintenant ϕ_2 à chaque branche ouverte et continuons le tableau. Cette procédure nous donne un tableau qui doit également être ouvert, puisque $\{\phi_1, \phi_2\}$ est consistant. Nous ajoutons ϕ_3, puis ϕ_4 et ainsi de suite. Nous obtenons un arbre généré d'une manière finie qui contient un nombre infini de noeuds (toutes les propositions dans Γ). Cet arbre doit contenir une branche infinie, par le lemme de König. Cette branche doit être ouverte et elle contient toutes les propositions dans Γ. □

[8] Pour les arbres non-ordonnés (qui sont tels que les successeurs d'un noeud ne forment pas une séquence, mais seulement un ensemble, nous avons besoin de l'axiome de choix de la théorie des ensembles.