Huitième leçon

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Philipp Keller

A lire pour le cours du 6 janvier 2004

1 La logique des prédicats

La logique propositionnelle nous permet la formalisation des inférences qui reposent sur le comportement logique des connecteurs propositionnels. Ces connecteurs relient des propositions et en forment des propositions complexes. Dans le langage naturel, cependant, il est possible de formuler d'autres inférences que la tradition a également conçues comme inférences logiques :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les hommes sont mortels.}\\ \text{Tous les philosophes sont des hommes.}\end{array}}{\text{Tous les philosophes sont mortels.}} \tag{1}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun philosophe n'est méchant.}\\ \text{Quelques logiciens sont des philosophes.}\end{array}}{\text{Quelques logiciens ne sont pas méchants.}} \tag{2}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun homme n'est parfait.}\\ \text{Tous les philosophes sont des hommes.}\end{array}}{\text{Aucun philosophe n'est parfait.}} \tag{3}$$

Dans les trois cas, nous retrouvons toutes les caractéristiques des inférences logiques : la validité de ces inférences ne semble dépendre que de quelques mots logiques, comme "tous", "aucun" et "quelques" ; toutes les inférences ayant la même forme que (1), (2) et (3) semblent également valides ; et leur validité ne semble pas dépendre du fait qu'il y a ou qu'il n'y a pas d'êtres humains immortels ou parfaits ou des philosophes méchants.

La logique propositionnelle ne nous permet pas d'expliquer la validité de ces inférences, puisqu'elle ne prend pas en compte la structure interne des propositions simples dont elle traite. L'inférence (1), par exemple, serait formalisée comme "p ; q ; donc, r" – ce qui n'est pas un schéma d'inférences valide de la logique propositionnelle.

Pour formaliser les trois inférences données et expliquer leur validité, il faut utiliser la notion de prédicat. Soit "H" une abréviation pour "...est un homme", "M" pour "...est mortel" et "P" pour "...est un philosophe". Étant donné ces abréviations, nous sommes en mesure de représenter (1) comme suit :

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Tous les } H \text{ sont des } M.\\ \text{Tous les } P \text{ sont des } H.\end{array}}{\text{Tous les } P \text{ sont des } M.} \tag{4}$$

Peu importe ce que nous substituons pour "H", "P", "M", nous obtenons des inférences également valides, comme, par exemple, la suivante :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les pingouins sont des animaux.}\\ \text{Tous les animaux sont maudits.}\end{array}}{\text{Tous les pingouins sont maudits.}} \tag{5}$$

Nous avons utilisé "H", "P" et "M" pour remplacer des prédicats. Mais qu'est-ce qu'un prédicat ? Observons d'abord qu'il n'y a pas de différence, d'un point de vue logique, entre "Aucun homme n'est parfait", "Il n'y a pas d'homme parfait" et "Aucun homme n'est une chose parfaite". Nous n'utilisons donc pas la notion grammaticale de 'prédicat'. On remarque aussi que les prédicats substitués pour "H", "P" et "M" peuvent être d'une complexité quelconque. Non seulement (5), mais également l'argument suivant est valide :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les pingouins qui ne sont ni noir ni employés par Microsoft}\\ \text{des amis de mon grand-père qui vit en Australie}\\ \text{Tous les amis de mon grand-père qui vit en Australie}\\ \text{ou bien sont des kangourous ou bien adorent la lune.}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Tous les pingouins qui ne sont ni noir ni employés par Microsoft}\\ \text{ou bien sont des kangourous ou bien adorent la lune.}\end{array}}$$

Il est important de ne pas confondre un prédicat (dans le sens que la logique donne à ce terme) avec le terme général qu'il peut contenir. "Pingouin", par exemple, est un terme général, mais le prédicat correspondant est "...est un pingouin" – le prédicat est ce qui, avec un nom, forme une phrase. Nous pouvons obtenir un prédicat à partir de n'importe quelle phrase, en remplaçant au moins un nom dans cette dernière par trois points. De la phrase

$$\text{Robert est l'animal préféré de Sam.} \tag{6}$$

nous obtenons les prédicats "...est un animal préféré de Sam", "Robert est l'animal préféré de ..." (ce qui, pour des raisons de lisibilité, est parfois transformé en "...est tel que Robert est son animal préféré") et finalement aussi le prédicat "...est un animal préféré de $\cdots$". Nous reviendrons plus tard sur les particularités de ce troisième prédicat.

La caractéristique logique la plus importante des prédicats est qu'ils peuvent être dits *vrais de* certaines choses. Le prédicat "...est un pingouin", par exemple, est vrai de tous les pingouins et n'est vrai de rien d'autre. Nous appellerons l'ensemble de toutes les choses dont un prédicat est vrai *l'extension* de ce prédicat. L'extension du prédicat "...est un pingouin", par exemple, est la classe de tous les pingouins, l'extension du prédicat "...est un pingouin heureux" est la classe de tous les pingouins heureux (qui est un sous-ensemble de l'ensemble de tous les pingouins) et ainsi de suite. L'extension d'un prédicat peut contenir un seul ou même aucun membre. L'extension de "...est un satellite de la terre" ne contient que la lune, et l'extension de "...est une licorne" est l'ensemble vide.

L'extension joue le même rôle pour les prédicats que la valeur de vérité pour les propositions : dans une logique extensionnelle, on ne s'intéresse qu'aux extensions des prédicats et à la valeur de vérité des propositions. Nous verrons plus tard comment profiter de cette analogie.

2 La syllogistique

Le premier pas vers une formalisation des inférences telles que (1) a été fait dans la logique traditionnelle, appelée 'syllogistique', dérivée des oeuvres d'Aristote, en particulier de son traité *De l'interprétation*. La syllogistique a dominé la logique pendant plus de 2000 ans.[1] Kant pensait

[1] Il y avait néanmoins d'autres traditions. Les Stoïciens, Petrus Hispanus et Duns Scot ont étudié la logique propositionnelle, par exemple.

que la logique était sortie "close et achevée" du cerveau d'Aristote et ce ne fut qu'avec Frege que l'on eut la preuve qu'il avait tort.

La syllogistique distingue quatre formes de propositions 'catégorielles', une proposition catégorielle étant composée d'un sujet, de la copule et d'un prédicat.

SaP	SiP	SeP	SoP
"tous les S sont P	"quelques S sont P"	"Aucun S n'est P"	"Quelques S ne sont pas P"
"tous les philosophes sont mortels"	"quelques chats sont des animaux"	"Aucun homme n' est blanc."	"Quelques chats ne sont pas jolis."
jugement affirmatif jugement général	jugement affirmatif jugement particulier	jugement négatif jugement général	jugement négatif jugement particulier

Les quatre types a, i, o, u (qu'on peut s'imaginer dérivés de "**a**ff**i**rmo" ("je maintiens") et "n**e**g**o**" ("je conteste")) se distinguent par les relations qui subsistent entre les objets tombant sous le concept de sujet "S" (son extension) et ceux qui tombent sous le concept de prédicat "P" : dans le cas d'un jugement général affirmatif ("SaP"), cette relation est celle d'inclusion, dans le cas d'un jugement particulier affirmatif ("SiP") intersection, dans le cas d'un jugement général négatif ("SeP"), les extensions sont disjointes, et dans le cas d'un jugement particulier négatif ("SoP") non-inclusion.[2] Il importe peu, en conséquence, que nous utilisions ordinairement le pluriel pour exprimer les jugements des types **i** et **o** : pour que "quelques pingouins sont heureux" soit vraie, par exemple, il suffit qu'un seul pingouin soit heureux.

Nous voyons donc que seuls les extensions comptent : d'autres manières d'exprimer un proposition catégorielle du type SaP seraient "Tout ce qui est S est P", "Chaque S est un P", "Les S sont P sans exception", "Seulement des P sont des S". Pour exprimer une relation du type SiP, on peut dire "Quelque chose est et un S et un P", "Il y a des S qui sont P", "Il y a des SP" (des pingouins heureux, par exemple). Pour un jugement général négatif (SeP), on peut dire "Aucune chose est et un S et un P", "Rien de S est P", "Les SP n'existent pas" (les pingouins heureux, par exemple).

Afin de formaliser le maximum de propositions soous forme catégorielle, on peut se servir de re-

[2] Si nous utilisons "$\mathsf{ext}(S)$" pour désigner l'extension de "S", nous pouvons représenter ces quatre relations comme suit :

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{SaP} & \iff & \mathsf{ext}(S) \subset \mathsf{ext}(P) \\
\mathbf{SiP} & \iff & \mathsf{ext}(S) \cup \mathsf{ext}(P) \neq \emptyset \\
\mathbf{SeP} & \iff & \mathsf{ext}(S) \cup \mathsf{ext}(P) = \emptyset \\
\mathbf{SoP} & \iff & \mathsf{ext}(S) \not\subset \mathsf{ext}(P) \iff \mathsf{ext}(S) \cap \mathsf{ext}(P) \neq \mathsf{ext}(S)
\end{array}$$

Il est également possible de définir les relations d'identité, d'inclusion, d'intersection et d'union entre des ensembles par des formules logiques :

$$\begin{array}{rcl}
A = B & \iff & \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \\
A \subset B & \iff & \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \\
A \cup B = C & \iff & \forall x (x \in C \leftrightarrow (x \in A \ \vee \ x \in B) \\
A \cap B = C & \iff & \forall x (x \in C \leftrightarrow (x \in A \ \wedge \ x \in B)
\end{array}$$

Nous pouvons définir une 'négation' comme suit (strictement, on devrait présupposer qu'il y ait un ensemble X dont toutes les ensembles considérés sont des sous-ensembles) :

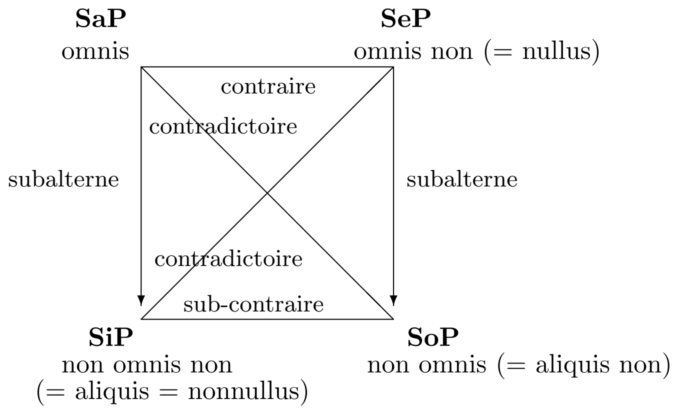
$$\bar{A} = B \quad \iff \quad \forall x (x \in B \leftrightarrow x \notin A)$$

Nous avons alors un équivalent des lois de Morgan :

$$\begin{array}{lcl}
A \cup B & \iff & \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} \\
A \cap B & \iff & \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}
\end{array}$$

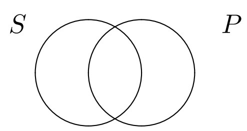
formulations. “Je ne vais nulle part en avion où je peux aller en train”, par exemple, peut être reformulée comme ayant la forme SeP : “aucune place où je vais par avion est telle que je peux y aller en train”. La phrase “Tout le monde dans la salle parle français” devient “toutes les personnes dans la salle sont des locuteurs du français” (SaP), “Je veux aller où tu vas” devient “Toute place où tu vas est une place où je veux aller aussi” (SaP) et “quand il pleut, la rue est mouillée” devient “tout instant où il pleut est un instant où la rue est mouillée” (SaP). Parfois cette transformation est loin d’être évidente, comme le montre la transformation de “Je l’ai connu avant qu’il ne se soit ruiné” en “Quelques instants avant qu’il ne se soit ruiné sont des instant où je l’ai connu”. Il n’y a pas non plus de règle générale, comme le montre le fait que “Un chevalier est présent” est clairement de la forme SiP, bien que “Un irlandais est roux” émette probablement un jugement du type SaP.

Les quatre types de jugements catégoriels se trouvent dans un carré d’oppositions :



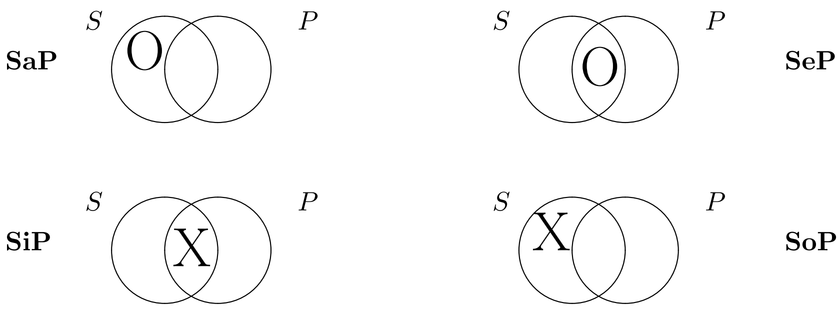
Comme dans le cas des carrés d’oppositions pour la logique propositionnelle, la relation de contradiction implique que l’une des propositions qu’elle relie est la négation de l’autre. Les propositions contraires, cependant, se distinguent par une négation interne : elles ne peuvent pas toutes les deux être vraies, mais elles peuvent être toutes les deux fausses : il n’est pas possible que tous les S soient P et qu’il ne soit pas le cas que tous les S soient des P (au moins s’il y a des S), mais il est possible qu’il y ait des S qui soient des P (et donc que “tous les S ne sont pas des P” soit fausse) et des S qui ne soient pas des P (et donc que “tous les S sont des P” soit également fausse). La relation de subalternation est simplement la relation de conséquence : si tous les S sont P (et s’il y a des S), alors il n’est pas vrai qu’il n’est pas le cas qu’aucun S n’est P ; si aucun S n’est P (et s’il y a des S), alors il n’est pas le cas que tous les S soient P. Le sub-contrariété, finalement, correspond à la vérité logique (= validité) de la disjonction. S’il y a des S (ce qui est présupposé tout le long), alors un exemplaire particulier de ces S est ou bien P ou bien il n’est pas P. S’il est P, alors il n’est pas vrai qu’aucun S ne soit P ; s’il n’est pas P, alors il n’est pas vrai que tous les S soient P. Alors au moins une des deux possibilités “non omnis non” ou “non omnis” est vraie.

Nous pouvons symboliser les quatre types de propositions catégielles par des diagrammes, appelés “diagrammes de Venn”. Les diagrammes de Venn nous permettent de symboliser des relations entre des extensions :



Ce diagramme nous montre une répartition de toutes les choses en quatre classes : les choses qui sont et S et P et se trouvent dans l’intersection des deux cercles, les choses qui sont S mais qui ne sont pas P et qui se trouvent dans la partie du cercle de gauche qui a la forme de la lune, choses qui sont P mais que ne sont pas S et qui se trouvent dans la partie droite du cercle à droite et enfin des choses qui ne sont ni des S ni des P et qui se trouvent en dehors des deux cercles.

Dans ce diagramme, les quatre formes catégorielles sont représentées comme suit :



Le grand "O" signifie que la partie dans laquelle il se trouve est vide : qu'il n'y a rien qui ne soit S mais pas P dans le cas SaP et qu'il n'y a rien qui ne soit S et P dans le cas SeP. Le grand "X" signifie que la partie dans laquelle il se trouve n'est pas vide : qu'il y a des choses qui sont et S et P dans le cas SiP et qu'il y a des choses qui sont S, mais qui ne sont pas P dans le cas SoP.

Que SaP et SoP, et également SiP et SeP, sont des contradictoires se montre par le fait que le diagramme du premier a un "X" où celui du deuxième a un "O" et vice versa. La contrariété de SaP et SeP vient du fait que le cercle S devient vide si on combine les deux"O" dans un diagramme ; et la sub-contrariété de SiP et SoP réside dans le fait qu'il n'y a aucun S si les deux sont fausses. Dans la syllogistique classique, il est toujours présupposé que les extensions des termes généraux considérés ne sont pas vides.

La syllogistique ne distingue les propositions catégorielles que par leur qualité (affirmative ou négative) et par leur quantité (générale ou particulière). Néanmoins, elle est capable de formaliser un bon nombre d'inférences intuitivement valides.

3 Les formes valides du raisonnement syllogistique

La syllogistique distingue les inférences directes des inférences indirectes. Les inférences directes n'ont qu'une seule prémisse. Les voici :

'Conversio simplex' $\quad \dfrac{AiB}{BiA} \qquad \dfrac{AeB}{BeA}$

'Conversio per accidens' $\quad \dfrac{AaB}{BiA} \qquad \dfrac{AeB}{BoA}$

'Conversio per contrapositionem' $\quad \dfrac{AaB}{(\bar{B})a(\bar{A})} \qquad \dfrac{AoB}{(\bar{B})o(\bar{A})}$

"Réduction de quantité" $\quad \dfrac{AaB}{AiB} \qquad \dfrac{AeB}{AoB}$

'obversio' $\quad \dfrac{AaB}{Ae(\bar{B})} \qquad \dfrac{AiB}{Ao(\bar{B})} \qquad \dfrac{AeB}{Aa(\bar{B})} \qquad \dfrac{AoB}{Ai(\bar{B})}$

L'expression "$\bar{A}$" dénote la 'négation' du terme général "A", c'est-à-dire l'expression qui a comme extension le complément de l'extension de "A". "$\overline{\text{pingouin}}$", par exemple, a comme extension tous les non-pingouin, c'est-à-dire toutes les choses qui ne sont pas des pingouins.

La validité de ces inférences directes (toujours sous la supposition que les cercles ne deviennent pas vides !) peut être vérifiée à l'aide des diagrammes. La 'conversio simplex', par exemple, correspond au fait que les diagrammes pour SiP et SeP sont symétriques (on peut changer les dénominations "S" et "P" sans changer ce que nous dit le diagramme), la 'réduction de quantité' au fait que les cercles ne deviennent jamais vides etc.

Les inférences indirectes consistent en deux prémisses – une prémisse majeure ('praemissa maior') et une prémisse mineure ('praemissa minor') – et une conclusion qui contiennent au total trois termes généraux, le sujet "S" de la conclusion (= 'terminus minor'), le prédicat "P" de la conclusion (= 'terminus maior') et le concept 'moyen' "M". Elles se distinguent en quatre 'figures' :

	première figure	deuxième figure	troisième figure	quatrième figure
praemissa maior	$M\ P$	$P\ M$	$M\ P$	$P\ M$
praemissa minor	$S\ M$	$S\ M$	$M\ S$	$M\ S$
conclusio	$S\ P$	$S\ P$	$S\ P$	$S\ P$

Puisqu'on a quatre possibilités pour relier "S" à "P" (et "M" à "S" etc.) – à savoir a, i, o et e –, on obtient pour chaque figure 64 (= $4 \cdot 4 \cdot 4$) 'modes'. De ces 256 modes (64 par figure), tous ne sont pas valides ; il n'y a que 24 modes qui sont valides, 19 dits 'forts' et 5 dits 'faibles' (un mode est appelé 'faible' si la conclusion est plus faible qu'elle ne devrait l'être étant donné les prémisses). Pour la première figure, on a 4 modes forts valides :

a-a-a "Barbara"	**e-a-e** "Celarent"
Tous les hommes sont mortels. Tous les philosophes sont des hommes. Tous les philosophes sont mortels.	Aucune martre n'est un ours. Toutes les outres sont des martres. Aucune outre n'est un ours.

a-i-i "Darii"	**e-i-o** "Ferio"
Tous les ours polaires sont blancs. Quelques ours sont des ours polaires. Quelques ours sont blancs.	Aucun griffon n'est un basset. Quelques chiens sont des griffons. Quelques chiens ne sont pas des bassets.

Les noms comme "Barbara" (pour l'inférence qui correspond au schéma **a-a-a**) ont été inventés au Moyen Âge. Pour la deuxième figure, on a également quatre modes forts qui sont valides :

e-a-e "Cesare"	**a-e-e** "Camestres"
Aucun mammifère n'est un oiseau. Tous les vautours sont des oiseaux. Aucun vautour n'est un mammifère.	Tous les vautours sont des oiseaux. Aucun mammifère n'est un oiseau. Aucun mammifère n'est un vautour.

e-i-o "Festino"	**a-o-o** "Baroco"
Aucun vautour n'est un basset. Quelques chiens sont des bassets. Quelques chiens ne sont pas des vautours.	Tous les bassets sont des chiens. Quelques chats ne sont pas des chiens. Quelques chats ne sont pas des bassets.

Il y a six modes forts valides pour la troisième figure :

a-a-i "Darapti"	**e-a-o** "Felapton"
Tous les bassets sont mortels. Tous les bassets sont des chiens. Quelques chiens sont mortels..	Aucune martre n'est un ours. Toutes martres sont des chiens. Quelques chiens ne sont pas des ours.

i-a-i “Disamis”	**a-i-i** “Datisi”
Tous les ours polaires sont blancs.	Tous les chiens sont mortels.
Tous les ours polaires sont des ours.	Quelques chiens sont des griffons.
Quelques ours sont blancs.	Quelques griffons sont mortels.

o-a-o “Bocardo”	**e-i-o** “Ferison”
Quelques chiens ne sont pas des griffons.	Aucun chien n’est un oiseau.
Tous les chiens sont animaux.	Quelques chiens sont des griffons.
Quelques animaux ne sont pas des griffons.	Quelques chiens ne sont pas des oiseaux.

Il y a cinq modes forts valides pour la quatrième figure :

a-a-i “Bamalip”	**a-e-e** “Calemes”
Tous les bassets sont des chiens.	Toutes les martres sont des chiens.
Tous les chiens sont des mammifères.	Aucun chien est un poisson.
Quelques mammifères sont des bassets.	Aucun poisson est une martre.

i-a-i “Dimatis”	**e-a-o** “Fesapo”
Quelques chiens sont das bassets.	Aucun basset n’est un vautour.
Tous les bassets sont des mammifères.	Tous les vautours sont des oiseaux.
Quelques mammifères sont des chiens.	Quelques oiseaux ne sont pas des bassets.

e-i-o “Fresison”
Aucun chien n’est un oiseau.
Quelques oiseaux sont des vautours.
Quelques vautours ne sont pas des chiens.

Nous voyons maintenant que l’inférence (1) était du type **a-a-a** (“Barbara”), (2) du type **e-i-o** (“Ferio”) et (3) du type **e-a-e** (“Cesare”).

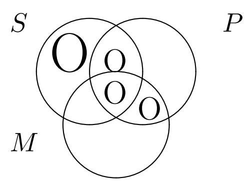
Les noms des modes forts valides étaient combinés en des ‘poèmes’ mnémotechniques :

Barbara, Celarent primae, Darii Ferioque.
Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae.
Tertia grande sonans recitat : Darapti, Felapton,
Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison. Quartae sunt :
Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.

Comme la ‘réduction de quantité’ est une inférence directe valide qui nous mène des jugements généraux aux jugements particuliers correspondants, on a pour chaque mode fort valide qui a une conclusion générale un mode faible correspondant : Pour la première figure, ceci nous donne “Barbari” et “Celaront”, pour la deuxième “Cesaro” et “Camestros” et pour la quatrième “Calemos”.

Pour tester la validité de ces syllogismes, nous pouvons encore utiliser les diagrammes de Venn, cette fois avec trois cercles. Pour **e-a-e**, par exemple, nous obtenons par cette méthode :

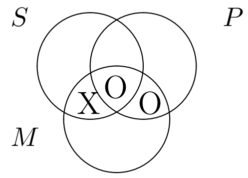
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun } P \text{ n'est } M.\\ \text{Tous les } S \text{ sont } M.\end{array}}{\text{Aucun } S \text{ n'est } P.}$$



Nous remarquons dans ce diagramme que la conclusion “Aucun S n’est P” s’ensuit, puisque l’intersection entre les extensions de “S” et de “P” est vide. Par la même méthode, nous pouvons vérifier les autres inférences, par exemple **e-i-o** :

Aucun M n’est P.
Quelques S sont M.

Quelques S ne sont pas P.



Du fait que nous avons fait un “X” en dehors de l’extension de “P”, mais à l’intérieur de l’extension de “S”, nous voyons que la conclusion s’ensuit.

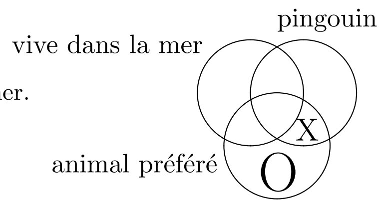
4 Les limites de la syllogistique

Nous avons déjà remarqué quelques limites de la syllogistique : elle ne nous procure aucune méthode mécanique pour déterminer la validité ou non-validité d’une inférence donnée sinon celle de vérifier si ou non l’inférence correspond à l’un des 24 modes valides[3] et elle nous oblige à trouver des reformulations alambiquées pour beaucoup de phrases du langage naturel.

Bien que les diagrammes de Venn nous donnent une méthode simple et intuitive pour vérifier la validité des syllogismes, ils nous montrent aussi d’autres limites de la syllogistique. Considérons l’inférence suivante :

Tous mes animaux préférés sont des pingouins ou vivent dans la mer.
Mes animaux préférés ne vivent pas tous dans la mer.

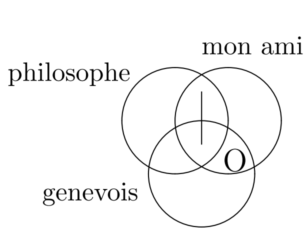
Quelques pingouins ne vivent pas dans la mer.



Le diagramme montre que l’inférence est valide, bien qu’il n’y ait pas de syllogisme correspondant. C’est pourquoi la méthode des diagrammes de Venn dépasse les limites de la syllogistique : elle nous permet d’établir la validité des inférences qui sont considérées non valides par la syllogistique. Une petite modification de la méthode des diagrammes (modification apportée par Lewis (1918)) nous permet d’élargir cette classe d’inférences. Nous utiliserons une ligne pour signifier qu’au moins l’une d’un certain nombre de parties d’un diagramme de Venn n’est pas vide – une ligne reliant deux parties correspond donc à un jugement existentiel et disjonctif.

Tous mes amis genevois sont des philosophes.
Quelques-uns de mes amis sont des philosophes ou des genevois.

Quelques-uns de mes amis sont des philosophes.



La ligne horizontale reliant (*philosophe et genevois et ami*) et (*philosophe et ami*) veut dire qu’une de ces deux régions n’est pas vide – il y a au moins une chose qui est ou bien ami-philosophe-genevois ou bien ami-philosophe. Parce que la ligne se trouve dans l’intersection des extensions de “philosophe” et de “ami”, la conclusion s’ensuit.

[3] C’est en raison de l’absence d’une telle méthode que les logiciens médiévaux se sont servis d’une série de règles générales telles que :
- Tout syllogisme valide a une prémisse universelle.
- Tout syllogisme valide avec une prémisse particulière a une conclusion particulière.
- Tout syllogisme valide avec une prémisse négative a une conclusion négative.

Un désavantage commun de la syllogistique et des diagrammes de Venn est que les deux méthodes sont limitées à un nombre très restreint de prédicats : la syllogistique n'en concerne que trois et il est impossible de représenter plus de trois cercles ou plus de cinq autres figures qui se recoupent. Il est aussi impossible de représenter des arguments qui mélanges des quantificateurs et des connecteurs propositionnels comme le suivant :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Si tous les amis sur ALL-PHILO sont en philo, quelques amis ne sont pas sur ALL-PHILO.}\\ \text{Ou bien tous les amis sont sur ALL-PHILO ou bien tous les amis sont en philo.}\end{array}}{\text{Si tous les amis en philo sont sur ALL-PHILO, quelques amis pas en philo y sont aussi.}}$$

Cette inférence a la forme suivante ("$F(\ldots)$" abrège "…est un ami", "$G(\ldots)$" "…est en philosophie" et "$H(\ldots)$" "…est inscrit sur la liste ALL-PHILO") :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les } F \text{ qui sont } H \text{ sont } G \;\rightarrow\; \text{Quelques } F \text{ ne sont pas } H.\\ \text{Tous les } F \text{ sont } H \;\vee\; \text{Tous les } F \text{ sont } G.\end{array}}{\text{Tous les } F \text{ qui sont } G \text{ sont } H \;\rightarrow\; \text{Quelques } F \text{ qui ne sont pas } G \text{ sont } H.}$$

A présent, nous n'avons encore aucun moyen de combiner les méthodes de la logique propositionnelle avec notre analyse des propositions quantifiée (contenant des expressions comme "tous", "quelque" ou "aucun").

Le diagnostic de ces défauts communs à la syllogistique et à la méthode des diagrammes de Venn est le suivant :

1. Elles ne reconnaissent pas la distinction cruciale entr prédicats et noms et ne nous permettent pas de formaliser des inférences telles que "Marie est mon amie ; donc j'ai une amie" ou "Tous les philosophes sont heureux ; Sam est un philosophe ; donc Sam est heureux".
2. Elles ne s'appliquent qu'à des prédicats 'unaires' (qui résultent d'une phrase par le remplacement d'un seul nom par des points) et non pas à des prédicats à plusieurs places.

La vertu principale de la logique moderne des prédicats est qu'elle nous permet de surpasser ces deux restrictions artificielles.

5 Les phrases ouvertes et leur satisfaction

Le concept fondamental qui caractérise la logique moderne a été introduit par Gottlob Frege : c'est celui d'une *fonction*. Frege était dissatisfait avec l'analyse de la grammaire classique pour plusieurs raison, dont par exemple son incapacité de rendre compte de la vacuité de la transformation de "Marc aime Marie" à "Marie est aimée par Marc" – même si ces deux phrases affirment la même chose, elles le font par deux prédications différentes.[4] Il a substitué, aux notions traditionnelles de prédicat et de sujet, des notions plus larges : celles de fonction et d'argument. Considérons les expressions suivantes :

(**F**1) $15 \cdot 1^2 + 1$

(**F**2) $15 \cdot 2^2 + 2$

(**F**3) $15 \cdot 3^2 + 3$

(**F**4) $15 \cdot 4^2 + 4$

(**F**5) $15 \cdot 5^2 + 5$

Dans toutes ces expressions, nous reconnaissons facilement la même fonction, que nous pouvons représenter comme suit :

F′ $15 \cdot x^2 + x$

F″ $15 \cdot (\ldots)^2 + (\ldots)$

[4]Nous allons, le long des prochaines leçons, rencontrer d'autres raisons de ne pas nous laisser guider par la forme grammaticale superficielle des énoncés formalisable dans la logique des prédicats.

L'argument (chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5 dans les exemples donnés) n'appartient pas, à proprement parler, à la fonction qui en a besoin pour former un tout complet. L'idée principale de Frege était de voir les prédicats comme un certain type de fonction, fonction qui prend un nom pour en faire une proposition.

Nous avons remarqué que nous obtenons des prédicats en effaçant des noms d'une phrase et que nous pouvons effacer plusieurs nom à la fois. Dans ces cas, cependant, il faut tenir compte de la diversité des noms effacés. Si nous obtenons "...aime $\cdots$" de "Julie aime Marc" et nous nous demandons si ce prédicat est vrai de Julie et Marc, l'ordre des noms de ces deux personnes est crucial, puisqu'il est tout à fait possible que Julie aime Marc sans que Marc aime Julie. C'est pourquoi il faut distinguer les positions des arguments, par exemple, en ajoutant des indices aux trois points : "$\ldots_1$ aime $\ldots_2$", "$\ldots_1$ est entre $\ldots_2$ et $\ldots_3$".

Une manière plus simple et plus efficace d'obtenir le même effet est de remplacer les trois points par ce qu'on appelle des *variables*, représentées par des lettres "x", "y", "z", "w" etc. Nous adoptons la convention que "x" représente toujours la première insertion possible dans la phrase, "y" la deuxième etc. Nous pouvons donc dire que le prédicat (il ne s'agit pas d'une phrase !) "x aime y" est vrai de Julie et Marc (dans cet ordre), mais peut-être faux de Marc et Julie. En d'autres termes, le prédicat est vrai de la paire $\langle$ Julie, Marc $\rangle$, mais ne l'est peut-être pas de la paire $\langle$ Marc, Julie $\rangle$. Une paire se distingue d'un ensemble de deux membres par le fait qu'il est ordonné, c'est-à-dire qu'on peut parler de son premier et de son second membre.[5]

Comme une phrase (en logique en tout cas) peut être d'une longueur arbitraire (bien que finie), il n'y a pas de limites au nombre de noms qu'elle peut contenir. Nous obtenons ainsi des prédicats d'une *adicité* (ou valence) arbitraire, l'adicité d'un prédicat étant le nombre de noms qu'il lui faut pour former une phrase. C'est pourquoi nous ne pouvons pas nous contenter des paires, mais devons parler des séquences arbitraires (la différence entre séquences et ensembles est que les premières viennent avec un ordre et non pas les secondes). La relation que nous exprimons par "...est vrai de...", cependant, n'est pas seulement une relation qui subsiste entre des prédicats et des choses, mais entre des prédicats et des séquences de choses.

Au lieu de dire qu'un prédicat résulte d'une phrase en effaçant un ou plusieurs noms, nous aurions aussi pu dire qu'un nom (ou, plus exactement : un terme singulier) est ce qui peut se combiner avec un prédicat pour former une phrase. C'est dans cette perspective-là que nous appelons un prédicat (dans son sens logique) une '*phrase ouverte*'. "...est un philosophe", par exemple, est une phrase ouverte dans le sens que cette expression contient une lacune (représenté par les trois points) et cette lacune doit être remplie pour que l'expression devienne une phrase (qui sera vraie si le nom inséré désigne un philosophe et fausse autrement).[6] Une phrase ouverte, malgré son nom, n'est pas une phrase ; elle est ni vraie ni fausse – elle est vraie ou fausse *de* quelque choses. Quand elle est vraie d'un certain objets ou de certains objets, nous disons que ces objets *satisfont* la phrase. Comme nous allons voir dans la suite, cette notion de *satisfaction* est la notion clef de la sémantique de la logique des prédicats.

[5]Cela ne veut pas dire que les paires ne sont pas des ensembles. Il existent différentes manières de définir des paires comme des ensembles d'un type particulier. On peut, par exemple, dire avec Kuratowski que la paire $\langle a, b\rangle$ est l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ou avec Wiener que c'est l'ensemble $\{\{a, \emptyset\}, \{b\}\}$. La différence importante entre paires et ensembles réside dans les conditions d'identité : deux ensembles sont identiques s'ils contiennent et seulement s'ils contiennent les mêmes membres ; deux paires (ou plus généralement : deux séquences) sont identiques si elles contiennent et seulement si elles contiennent les mêmes membres *dans le même ordre*. "$\{a, b\}$" et "$\{b, a\}$" désignent le même ensemble, mais $\langle a, b\rangle$ et $\langle b, a\rangle$ sont deux paires différentes ; $\{a, a\}$ est identique à $\{a\}$, mais $\langle a, a\rangle$ est différent de $\langle a\rangle$ (ce qui se vérifie facilement avec les deux définitions données).

[6]Dans le langage ordinaire, il n'est pas en général le cas que la phrase est fausse si le nom inséré désigne quelque chose d'autre qu'un philosophe. La possibilité que la phrase devienne du non-sens existe également. Suivant Frege, nous supposerons par la suite que ce n'est pas le cas pour notre langage formel, c'est-à-dire que tout prédicat est *entièrement défini* – que pour tout objet dont nous voulons parler, il est ou bien vrai de cet objet ou bien faux de cet objet. Nous traiterons, en d'autres termes, le non-sens comme faux.

6 La formalisation dans la logique des prédicats

Pour dire qu'une phrase ouverte est satisfaite par un certain individu, nous formons ce qu'on appelle une *'proposition singulière'*. Une proposition singulière est une proposition qui contient un nom d'au moins un individu particulier et prédique un prédicat de cet individu (ou une relation de plusieurs individus). Pour dire que Sam est triste, par exemple, nous disons que Sam satisfait la phrase ouverte "...est triste". Pour désigner Sam nous utilisons, dans la logique des prédicats, ce qu'on appelle une *'constante individuelle'*, par exemple "a". Pour dire que a satisfait la phrase ouverte "Fx", nous appliquons la fonction représentée par "Fx" à un argument, représenté par une constante individuelle :

$$Fa \tag{7}$$

(7) est la forme générale d'une proposition simple dans la logique des prédicats.

Selon son interprétation fregéenne, la phrase singulière (7) désigne la valeur de la fonction Fx pour l'argument a – comme les prédicats sont des fonctions d'individus à des valeurs de vérité, cette valeur est **v**, le vrai, si Sam est triste, et elle est **f**, le faux, s'il n'est pas le cas que Sam est triste.

Il y a, cependant, d'autres propositions que les propositions singulières. Quand je dis que tous les pingouins sont heureux, par exemple, ou qu'il y a un philosophe irlandais, je ne parle d'aucun pingouin ou philosophe en particulier. Il n'y a pas d'individu spécifique dont je prédique être un pingouin heureux ou un philosophe irlandais. Nous appellerons de telles propositions qui ne sont pas singulières des *'propositions générales'*.

La combinaison avec un nom n'est pas la seule manière dont une phrase ouverte peut devenir une phrase et être vraie ou fausse. Considérons les phrases suivantes :

A1 Tous les philosophes sont mortels.

B1 Il n'y a rien d'entièrement noir qui est entièrement rouge.

C1 Quelques pingouins sont heureux.

D1 Quelques animaux ne sont pas des pingouins.

Ces phrases sont complètes, mais ne contiennent pas de nom autre que des noms de phrases ouvertes : elles expriment des propositions générales, correspondant à nos quatre types de propositions catégorielles. A leur intérieur, nous discernons des connecteurs, par exemple une négation dans **D1**. Ces connecteurs, cependant, ne relient pas des phrases entières, mais des prédicats, des phrases ouvertes. Quels sont les connecteurs dans **A1** et dans **B1** ? Les réformulations suivantes nous montrent qu'il s'agit des implications :

A2 Si quelqu'un est un philosophe, alors il est mortel.

B2 Si quelque chose est entièrement noir, alors elle n'est pas entièrement rouge.

C2 Il y a au moins un pingouin qui est heureux.

D2 Il y a au moins un animal qui n'est pas un pingouin.

A2 à **D2** nous montrent également que les phrases ouvertes liées par des connecteurs ne peuvent pas être évaluées d'une manière indépendante des autres, puisqu'elles contiennent des pronoms ("il" dans **A2**, "elle" dans **B2**, "qui" dans **C2** et dans **D2**) qui dépendent, pour leurs valeurs sémantiques, de leurs antécédents dans le reste de la proposition. Ces pronoms, comme nous le verrons plus tard, correspondent à des variables dont les valeurs sont coordonnées par le quantificateur qui les gouverne.

Si nous interprétons nos phrases modèles à l'aide de la notion de satisfaction, nous obtenons les phrases métalinguistiques suivantes :

A3 Toutes les choses qui satisfont "...est un philosophe" satisfont également "...est mortel".

B3 Toutes les choses qui satisfont "...est entièrement noir", ne satisfont pas "...est entièrement rouge".

C3 Il y a des choses qui satisfont "...est un pingouin" et "...est heureux".

D3 Il y a des choses qui satisfont "...est un animal", mais qui ne satisfont pas "...est un pingouin".

Toutes ces phrases commencent par une tournure que nous appellerons "quantificateur" : pour exprimer des quantificateurs, dans la logique des prédicats, nous préférons normalement les tournures suivantes, qui réduisent le nombre de tournures 'logiques' de quatre ("tous", "quelques", "aucun", "quelques ne ...pas") à deux ("tous" et "il y a") :

A4 Tout ce qui est un philosophe est mortel.

B4 Tout ce qui est entièrement noir n'est pas entièrement rouge.

C4 Il y a des pingouins heureux.

D4 Il y a des animaux qui ne sont pas des pingouins.

Suivant le modèle de **A2** à **D2**, nous pouvons introduire des variables pour remplacer les pronoms et rendre perspicace la manière dont les phrases ouvertes sont liées par des connecteurs :

A5 Pour tout x, si x est un philosophe, alors x est mortel.

B5 Pour tout x, si x est entièrement noir, alors x n'est pas entièrement rouge.

C5 Il y a des x tels que x est un pingouin et x est heureux.

D5 Il y a des x tels que x est un animal et x n'est pas un pingouin.

Nous retrouvons des connecteurs propositionnels ("$\rightarrow$" dans (**A5**) et (**B5**), "$\wedge$" dans (**C5**) et (**D5**), "$\neg$" dans (**B5**) et (**D5**)) qui ne relient pas des phrases, mais des phrases ouvertes. Le résultat de leur application à des phrases ouvertes est une autre phrase ouverte, logiquement complexe – les connecteurs propositionnels forment des prédicats complexes à partir de prédicats plus simples.

Bien qu'elles ne contiennent pas de noms, les phrases (**A1**) à (**D1**) (et (**A2**) à (**D2**)etc.) sont néanmoins complètes : elles peuvent être vraies ou fausses et n'ont pas besoin d'être complétées par des noms. Le mécanisme qui en est responsable est appelé '*quantification*' et représenté par les deux tournures 'pour tout' (abrégée par "$\forall$" et appelée "quantificateur universel") et 'il existe au moins un' (abrégée par "$\exists$" et appelé "quantificateur existentiel").[7] Ces quantificateurs prennent une phrase ouverte et forment une phrase complète, exprimant que tous ou certains objets satisfont les phrases ouvertes en question. La traduction de nos exemples serait la suivante :

A6 $\forall x$ (si x est un philosophe, alors x est mortel)

B6 $\forall x$ (si x est entièrement noir, alors x n'est pas entièrement rouge)

C6 $\exists x$ (x est un pingouin et x est heureux).

D6 $\exists x$ (x est un animal et x n'est pas un pingouin)

En introduisant les connecteurs et en abrégeant les prédicats, nous obtenons les phrases suivantes comme résultat final de notre essai de formalisation :[8]

A7 $\forall x\ (\mathbf{Ph}(x) \rightarrow \mathbf{M}(x))$

B7 $\forall x\ (\mathbf{noir}(x) \rightarrow \neg\mathbf{rouge}(x))$

C7 $\exists x\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{H}(x))$

D7 $\exists x\ (\mathbf{A}(x) \wedge \neg\mathbf{P}(x))$

[7] Il existe d'autres manières d'abréger les quantificateurs. Pour le quantificateur universel, on utilise parfois "$(x)(\ldots x \ldots)$", "$\bigvee x(\ldots x \ldots)$" et, en Pologne, "$\Pi x(\ldots x \ldots)$" au lieu de "$\forall x(\ldots x \ldots)$". Pour le quantificateur existentiel, on trouve "$E(x)(\ldots x \ldots)$", "$\bigwedge x(\ldots x \ldots)$" et "$\Sigma x(\ldots x \ldots)$" à la place de "$\exists x(\ldots x \ldots)$".

[8] Nous utilisons "$\mathbf{Ph}(x)$" pour "...est un philosophe", "$\mathbf{M}(x)$" pour "...est mortel", "$\mathbf{rouge}(x)$" pour "...est entièrement rouge", "$\mathbf{noir}(x)$" pour "...est entièrement noir", "$\mathbf{A}(x)$" pour "...est un animal", "$\mathbf{P}(x)$" pour "...est un pingouin" et "$\mathbf{H}(x)$" pour "...est heureux".

Nous observons que nous pouvons les transformations habituelles aux connecteurs reliant les phrases ouvertes. Les lois de Morgan, la définition de "$\rightarrow$" en termes de "$\vee$" et de "$\neg$" et l'élimination de la double négation nous assurent, par exemple, que les phrases suivantes sont sémantiquement équivalentes à **A7** à **D7** :

A8 $\forall x\ \neg(\mathbf{Ph}(x) \wedge \neg \mathbf{M}(x))$

B8 $\forall x\ \neg(\mathbf{noir}(x) \wedge \mathbf{rouge}(x))$

C8 $\exists x\ \neg(\neg \mathbf{P}(x) \vee \neg \mathbf{H}(x))$

D8 $\exists x\ \neg(\neg \mathbf{A}(x) \vee \mathbf{P}(x))$

Il est important de distinguer les négations internes, qui portent sur les phrases ouvertes, des négations externes, qui portent sur des phrases complètes. Qu'est-ce qui arrive si nous rajoutons des négations externes à **A8** à **D8** ? La négation de **A8**, par exemple, dirait qu'il n'est pas le cas que tous les x sont tels qu'ils sont ni philosophe ni immortels – qu'il y a, par conséquent, au moins un x qui n'est ni philosophe ni immortel. La négation de **C8** est une phrase qui dit qu'il n'y a pas de x qui ne satisfait pas la phrase ouverte "x n'est pas un pingouin ou x n'est pas heureux" – et donc que tous les x le satisfont, que tous les x sont ou bien pas des pingouins ou ne sont pas heureux.

Nous remarquons une équivalence sémantique propre aux quantificateurs : dire que tous les pingouins sont heureux revient à dire qu'il n'y a pas de pingouin qui n'est pas heureux ; dire qu'il y a des pingouin romantiques est dire qu'il n'est pas le cas qu'aucun pingouin soit romantique. Tous les F sont G s'il et seulement s'il n'y a pas de F qui n'est pas G. Il y a un F s'il n'est pas et seulement s'il n'est pas le cas que toutes les choses soient $\neg F$. Une phrase de la même forme que "$\forall x(\ldots x \ldots)$" est donc équivalente sémantiquement à une phrase de la même forme que "$\neg\exists x \neg(\ldots x \ldots)$" et le même raisonnement vaut pour les phrases de la même forme que "$\exists x(\ldots x \ldots)$" et de "$\neg\forall x \neg(\ldots x \ldots)$".

Schématiquement, en utilisant $\ulcorner \phi(x) \urcorner$ comme nom de n'importe quelle proposition qui contient une occurrence de la variable "x" :

$$\begin{array}{lcl} \ulcorner \forall x\ (\phi(x)) \urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner \neg\exists x\ \neg(\phi(x)) \urcorner \\ \ulcorner \exists x\ (\phi(x)) \urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner \neg\forall x\ \neg(\phi(x)) \urcorner \end{array}$$

Nous servant des négations 'externes', qui portent sur des phrases complètes, nous pouvons donc formaliser les quatre phrases considérées à l'aide d'un seul quantificateur :

A9	$\forall x(\mathbf{Ph}(x) \rightarrow \mathbf{M}(x))$	**A10**	$\neg\exists x(\mathbf{Ph}(x) \wedge \neg \mathbf{M}(x))$
B9	$\forall x(\mathbf{noir}(x) \rightarrow \neg \mathbf{rouge}(x))$	**B10**	$\neg\exists x(\mathbf{noir}(x) \wedge \mathbf{rouge}(x))$
C9	$\neg\forall x(\mathbf{P}(x) \rightarrow \neg \mathbf{H}(x))$	**C10**	$\exists x(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{H}(x))$
D9	$\neg\forall x(\mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{P}(x))$	**D10**	$\exists x(\mathbf{A}(x) \wedge \neg \mathbf{P}(x))$

L'équivalence sémantique entre "$\forall x(\ldots x \ldots)$" et "$\neg\exists x \neg(\ldots x \ldots)$" a une autre conséquence : elle implique que le quantificateur universel n'a pas de portée existentielle – que nous ne pouvons pas conclure, du fait que tous les F sont G, qu'il y a des F. Cela s'explique par l'équivalence mentionnée : s'il n'y a pas de F, il n'y a pas de F qui sont G et il n'y a pas non plus des F qui sont $\neg G$. En conséquence, et "$\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$" et "$\neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$" sont des phrases vraies. Ces phrases, cependant, sont équivalentes à "$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$" et à "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$" respectivement. Étant donné qu'il n'y a pas de licornes, "toutes les licornes sont bleues" et "toutes les licornes ne sont pas bleues" sont deux phrases également vraies.

Il est donc significant que nous formalisons "tous les F sont G" par "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$", utilisant l'implication pour restreindre le choix des x en question. Il est également significant que nous formalisent "il y a des F qui sont des G" ou "quelques F sont des G" par "$\exists x(Fx \wedge Gx)$", utilisant la conjonction plutôt que, par exemple, l'implication. Étant donné l'interdéfinissabilité des connecteurs, "$\exists x(Fx \to Gx)$" est équivalente à "$\exists x(\neg Fx \vee Gx)$", une phrase qui n'affirme pas qu'il y a des F en premier lieu.

7 Une classification des expressions

La logique propositionnelle, nous l'avons dit, traite des propositions et des connecteurs, la logique des prédicats des prédicats, des quantificateurs et des constantes individuelles. Nous avons également dit qu'une proposition est ce qui est exprimé par une phrase complète et ce qui peut être vrai ou faux et qu'un prédicat résulte d'une phrase après effacement d'un ou de plusieurs noms. Nous devons maintenant être un peu plus précis.

La notion de proposition, qui est une notion philosophique, ne coïncide pas entièrement avec la notion de phrase, qui est une notion grammaticale. Une phrase peut être complète du point de vue grammatical sans pour autant exprimer une proposition : "J'ai faim", pour être vraie ou fausse, a besoin d'une référence indexicale : dans certains contextes, cette phrase exprime la proposition qu'un certain individu, a, a faim, dans d'autres qu'un autre individu, b, a faim. Une phrase peut aussi être complexe et ainsi exprimer une proposition complexe qui contient plusieurs propositions simples. Le critère d'identification des propositions est leur capacité à être vraies ou fausses. Parallèlement à ce critère sémantique, il existe un critère purement syntaxique : une phrase (au sens logique) est une entité linguistique qui peut être combinée avec une négation propositionnelle ("il n'est pas le cas que ...").

Les différences entre les points de vue grammatical et logique se multiplient quand on prend en compte la structure interne des phrases, comme nous le faisons dans la logique des prédicats. La grammaire classique distingue des noms propres, des noms communs, des verbes, des particules, des prépositions, des adverbes et des adjectifs. La logique des prédicats, cependant, ne reconnaît que des connecteurs propositionnels, des quantificateurs, des prédicats et des termes singuliers. Les connecteurs sont les concepts formels qui nous servent à former des propositions complexes à partir de propositions simples. Un prédicat est une expression qui nous sert à attribuer une propriété à quelque chose. Cette propriété peut être une propriété d'une ou de plusieurs choses ; un prédicat unaire (qui résulte d'une phrase en effaçant (plusieurs occurrences d') un seul nom) attribue une propriété monadique, un prédicat binaire (tertiaire, ...) une propriété relationnelle. Syntaxiquement, un prédicat est une expression qui peut être combinée avec une négation 'interne', "...n'est pas tel que ...", qui prend un prédicat et en fait un autre.

Un terme singulier est une expression qui désigne exactement un objet ; selon la classification traditionnelle d'Aristote, c'est ce dont quelque chose (un prédicat) est prédiqué ou dit et ce qui ne peut pas être dit d'autre chose. Le propre d'un terme singulier est sa relation de désignation ou de référence à un et un seul objet précis. Parmi les termes singuliers, la philosophie du langage distingue au moins trois sous-espèces d'expressions : un nom propre, comme "Sam" ou "Paris", est une expression qui se réfère 'directement' à un objet ; une expression indexicale, comme "ceci", "je" ou "maintenant", désigne par l'intermédiaire d'un contexte d'énonciation, et une description définie comme "le roi actuel de la France" et "l'homme dans le coin" désigne au moyen de son contenu 'descriptif' (le prédicat à l'aide duquel il est formé, "...est le roi actuel de la France", "...est l'homme dans le coin").

Une représentation claire et exhaustive de représenter ces différences grammaticales nous est fournie par la 'grammaire catégorielle' qui représente les phrases par "S" et les termes singuliers par "N". Nous pouvon dire qu'un connecteur propositionnel binaire est une expression de la catégorie **S/SS**, parce qu'il prend deux phrases pour en faire une, plus complexe :[9]

[9] Un avantage de la notation de la grammaire catégorielle est qu'elle nous permet de 'calculer' le type syntaxique de la juxtaposition de deux expressions arbitraires : la combinaison d'une expression du type **S/SS** avec deux expressions du type **S** serait du type **S**. La combinaison d'une telle expression avec une expression du type **N** sera

Il pleut	et	Je suis triste
S	S/SS	S

Il pleut et je suis triste
S

Les autres connecteurs propositionnels binaires, "ou", "si-alors", "si et seulement si" prennent également deux phrases et en forment une phrase complexe. La négation propositionnelle, cependant, ne prend qu'une seule phrase et est donc du type **S/S**.

Un prédicat unaire, d'après notre définition, est une expression qui forme, avec un terme singulier, une phrase complète, ce qui correspond au type **S/N** :

Sam	...est triste
N	S/N

Sam est triste.
S

Les prédicats binaires seront du type **S/NN**, les prédicats ternaires du type **S/NNN** et ainsi de suite. Cette notation nous montre comment un prédicat binaire, combiné avec un seul terme singulier, devient un prédicat unaire (dit 'relationel', parce qu'il est obtenu d'une relation) :

Sam	...aime ···	Maria
	S/NN	N
	...aime Maria	
N	S/N	

Sam aime Maria
S

L'expression du type **S/NN** a été 'partiellement complétée' par le nom "Maria" (du type **N**), ce qui produit une expression du type **S/N**. La relation exprimée par "...aime ···" est une propriété de la paire ⟨ Sam, Maria ⟩, mais la propriété monadique exprimée par "...aime Maria" est une propriété de Sam.

La grammaire catégorielle nous permet aussi de symboliser l'autre usage que nous avons fait des connecteurs qui était de relier non pas des propositions ou phrases complètes, mais des phrases ouvertes :

Sam	...est triste	et	...marié
	S/N	(S/N)/(S/N)(S/N)	S/N
		...est triste et marié	
N		S/N	

Sam est triste et marié
S

Le connecteur "$\wedge$" dans cette phrase est du type (**S**/**N**)/(**S**/**N**)(**S**/**N**) – il prend deux phrases ouvertes et en forme une phrase ouverte. Comme les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses, mais seulement vraies ou fausses *de* certains objets, la sémantique des connecteurs qui les relient ne peut pas être donnée par des tables de vérité. C'est pourquoi nous utilisons un autre concept fondamental de la sémantique, celui de satisfaction, pour expliquer leur signification :[10]

$\neg$: Un objet a satisfait "$\neg Fx$" si et seulement si a ne satisfait pas "Fx".

$\wedge$: Un objet a satisfait "$Fx \wedge Gx$" si et seulement si a satisfait "Fx" et a satisfait "Gx".

$\vee$: Un objet a satisfait "$Fx \vee Gx$" si et seulement si a satisfait "Fx" ou a satisfait "Gx".

---

mal-formée.

[10] Nous donnerons dans la leçon neuf une sémantique pour des occurences de ces connecteurs qui relient des formules arbitraires.

$\rightarrow$: Un objet a satisfait "$Fx \rightarrow Gx$" si et seulement si a ne satisfait pas "Fx" ou a satisfait "Gx".

$\leftrightarrow$: Un objet a satisfait "$Fx \leftrightarrow Gx$" si et seulement si a satisfait "Fx" et "Gx" ou ne satisfait ni "Fx" ni "Gx".

La grammaire catégorielle nous permet de représenter facilement des prédicats de deuxième et troisième ordre. Un prédicat est dit 'de premier ordre' s'il s'applique à des noms d'objets, c'est-à-dire à des expressions qui représentes des choses qui ne sont ni des propriétés ni des relations, mais des individus. C'est de ces prédicats que l'on a parlé jusqu'à maintenant. Un prédicat de deuxième ordre, cependant, est un prédicat qui s'applique à des propriétés et relations et se combine avec des prédicats – les expressions, par exemple, "...est un prédicat" et "...s'applique à un nom d'un objet pour former une phrase" sont de tels prédicats de deuxième ordre. Comme un prédicat (unaire) de premier ordre est du type $\mathbf{S}/\mathbf{N}$, un prédicat de deuxième ordre sera du type $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$. Il y a également des prédicats de troisième ordre ($\mathbf{S}/(\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N}))$), de quatrième ordre etc.

L'interprétation sémantique des prédicats de deuxième et troisième ordre se fait le plus intuitivement en termes d'ensembles. Supposons que la totalité des choses pour lesquelles nous disposons de noms ou dont nous voulons parler forme un ensemble D, notre *univers de discours*. Un prédicat, nous l'avons vu, est vrai de certaines de ces choses – son extension sera alors un sous-ensemble de D. Si nous identifions des prédicats ayant la même extension, nous pouvons dire que n'importe quel sous-ensemble de D (n'importe quel membre de $\mathcal{P}(D)$, c'est-à-dire de l'ensemble de tous les sous-ensembles de D) définit (ou correspond à) un prédicat – le prédicat qui est vrai de tous les objets qui et seulement des objets qui se trouvent dans le sous-ensemble de D en question.

Si les prédicats de premier ordre sont des membres de $\mathcal{P}(D)$, les prédicats de deuxième ordre sont des membres de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ – ils sont vrais de certains prédicats (de certains sous-ensembles de D) et faux d'autres ; ils sont des ensembles de sous-ensembles. Nous voyons par cette analogie que la similarité entre les différents ordres de prédicats et les différents types dans la théorie des ensembles n'est pas que superficielle.

Cependant, les prédicats de deuxième ordre ne sont pas les seuls à tomber sous la catégorie $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$: les autres expressions qui tombent sous ce type sont les quantificateurs de premier ordre. Il est donc important que nous expliquions ce que nous voulons dire par cela.

8 La syntaxe des quantificateurs de premier ordre

Les quantificateurs prennent des phrases ouvertes pour en faire des phrases complètes. Les phrases ouvertes peuvent être de différents ordres, selon qu'elles sont vraies (ou fausses) d'objets ou vraies (ou fausses) de prédicats ou vraies (ou fausses) de prédicats de prédicats etc. Les deux quantificateurs de la logique des prédicats que nous allons étudier, le quantificateur universel "$\forall x(\dots x \dots)$" et le quantificateur existentiel "$\exists x(\dots x \dots)$", ne prennent que des prédicats ou phrases ouvertes de premier ordre – ils quantifient sur des objets et sont, pour cette raison, appelés 'objectuels'. Une logique ne contenant dans son langage que des quantificateurs qui s'appliquent à des phrases ouvertes de premier ordre (et qui sont, en conséquence, eux-mêmes de deuxième ordre) est appelée elle-même '*de premier ordre*'. La logique classique des prédicats est la logique des prédicats de premier ordre et c'est elle que nous allons étudier.

Références

Aristotle, 1963, *Categories and De Interpretatione*, Clarendon Aristotle series ; ed. J.L. Ackrill, Oxford, England : Clarendon Press, translated with notes by J.L. Ackrill.

Clarence Irving Lewis, 1918, *Survey of Symbolic Logic*, Berkeley, California : University of California Press.