Neuvième leçon

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Philipp Keller

A lire pour le cours du 13 janvier 2004

1 Quelques inférences valides dans la logique des prédicats

Nous avons vu comment nous pouvons nous servir du mécanisme de la quantification pour exprimer des propositions générales. Cette introduction de quantificateurs rend notre langage plus expressif. Supposons que nous voulons dire que tous les hommes sont mortels et l'exprimer dans notre langage. Vu qu'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes (présents ou passés, au moins), nous pourrions énoncer la longue conjonction suivante :

Sylvie est mortelle $\wedge$ Sam est mortel $\wedge$ Marie est mortelle $\wedge$ Rosemarie est mortelle $\wedge$ Jean-Claude est mortel $\wedge$ Kevin est mortel $\wedge$ Roberta est mortelle $\wedge$ John est mortel $\wedge$ Claudia est mortelle $\wedge$ Robert est mortel $\wedge$ Philipp est mortel $\wedge$ ...

– une phrase certainement très longue, mais finie et bien-formée selon la logique des propositions. Si nous arrivons à énumérer tous les hommes, nous obtenons une phrase qui est vraie si et seulement si tous les hommes sont mortels. Néanmoins, une telle procédure, en plus de son caractère rébarbatif, aurait au moins trois autres désavantages majeurs :

1. La longue conjonction est équivalente sémantiquement à "tous les hommes sont mortels" seulement s'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes.
2. La longue conjonction est équivalente sémantiquement à "tous les hommes sont mortels" seulement si tous les hommes ont des noms.
3. Lorsque nous parlons de tous les hommes, notre énonciation a un aspect général : nous ne voulons pas dire qu'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes ou que nous connaissons un nom pour chaque homme qui existe ou existait, mais nous voulons parler de la totalité des hommes, indépendamment des membres particuliers qu'elle contient.

L'usage du quantificateur universel "$\forall$" ne tombe sous aucune de ces restrictions. Pour dire que tous les hommes sont mortels, nous disons simplement :[1]

$$\forall x\ (x \text{ est un homme} \rightarrow x \text{ est mortel}) \tag{1}$$

Dans la phrase (1), nous ne parlons d'aucun homme en particulier : le quantificateur universel prend ses valeurs dans tout l'univers du discours. Nous notons deux conséquences de cette généralité :

[1]Il y a plusieures façons de lire la phrase (1) :

1. Les hommes sont mortels.
2. Un humain est mortel.
3. Chaque homme est mortel.
4. Quiconque est un homme est mortel.

Nous utiliserons parfois la locution "tous les x sont tels que, si x est un homme, alors x est mortel" qui rend plus visible la forme logique.

Premièrement, (1) est 'confirmée' par tous les pingouins – parce que tout pingouin satisfait la phrase ouverte "$\neg$ (x est un homme) $\vee$ (x est mortel)". Deuxièment, (1) est vraie s'il n'y a pas d'hommes ; dû à la signification de "$\rightarrow$", la phrase ouverte complexe est vraie de tout objet dont l'antecédent est faux.

Même si notre langage est devenu plus expressif en incluant des variables et des quantificateurs, qu'est-ce qui s'ensuit sur la logique ? Est-ce que nous serons toujours capable de formaliser comme valides les inférences syllogistiques ? Revenons donc sur les inférences suivantes :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les hommes sont mortels.}\\ \text{Tous les philosophes sont des hommes.}\end{array}}{\text{Tous les philosophes sont mortels.}} \tag{2}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun philosophe n'est méchant.}\\ \text{Quelques logiciens sont des philosophes.}\end{array}}{\text{Quelques logiciens ne sont pas méchants.}} \tag{3}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun homme n'est parfait.}\\ \text{Tous les philosophes sont des hommes.}\end{array}}{\text{Aucun philosophe n'est parfait.}} \tag{4}$$

En formalisant les prémisses et les conclusions dans la logique des prédicats, nous obtenons les schémas d'inférences suivantes :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (x \text{ est un homme} \rightarrow\ x \text{ est mortel})\\ \forall x\ (x \text{ est un philosophe} \rightarrow\ x \text{ est un homme})\end{array}}{\forall x\ (x \text{ est un philosophe} \rightarrow\ x \text{ est mortel})} \tag{5}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\exists x\ (x \text{ est un philosophe} \wedge x \text{ est méchant})\\ \exists x\ (x \text{ est un logicien} \wedge x \text{ est un philosophe})\end{array}}{\exists x\ (x \text{ est un logicien} \wedge \neg(x \text{ est méchant}))} \tag{6}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\exists x\ (x \text{ est un homme} \wedge x \text{ est parfait})\\ \forall x\ (x \text{ est un philosophe} \rightarrow\ x \text{ est un homme})\end{array}}{\neg\exists x\ (x \text{ est un philosophe} \wedge x \text{ est parfait})} \tag{7}$$

Nous pouvons facilement justifier la validité de ces trois schémas :

(5) : si nous choisissons, pour vérifier la conclusion, n'importe quel individu a qui est un philosophe, la deuxième prémisse nous dit que cet individu est un homme et la première prémisse nous dit qu'en conséquence il est mortel ;

(6) : la deuxième prémisse nous dit qu'il y a un objet, l'appelons "a", qui est logicien et philosophe. Si, contrairement à ce que dit la conclusion, ce a n'était pas seulement un logicien, mais aussi méchant, alors il y aurait, contrairement à ce que dit la première prémisse, un philosophe méchant.

(7) : S'il y avait un philosophe parfait, alors ce philosophe, par la deuxième prémisse, serait un homme et alors, par la première prémisse, il ne serait pas parfait. Donc il n'y a pas de philosophe parfait.

Le but de cette leçon est de formuler une sémantique qui justifie la validité de ces schémas d'inférences.

2 * Le langage $\mathcal{L}^+$

Afin de pouvoir formaliser les inférences qui nous intéressent, nous devons d'abord élargir la syntaxe de notre langue. Dans la quatrième leçon, nous avons défini le langage $\mathcal{L}$ qui consiste des formules propositionnelles composées de propositions simples et de connecteurs propositionnels. Nous élargissons maintenant notre alphabet et adoptons une nouvelle définition, plus large, de ce qu'est une formule bien-formée :

Définition 1. *L'*alphabet *du langage $\mathcal{L}^+$ de la logique des prédicats consiste en les signes suivants :*

1. *des signes logiques :*
   (a) *les connecteurs "$\neg \ldots$" ("ne-pas"), "$\ldots \wedge \cdots$" ("et"), "$\ldots \vee \cdots$" ("ou"), "$\ldots \rightarrow \cdots$" ("si-alors) et "$\ldots \leftrightarrow \cdots$" ("ssi") ;*
   (b) *les quantificateurs "$\forall x(\ldots x \cdots)$" ("pour tout x") et "$\exists x(\ldots x \cdots)$" ("il y a au moins un x") ;*
   (c) *le signe d'identité : "$\ldots \doteq \cdots$" ("est identique à") ;*
   (d) *des variables pour des individus : "x_i" pour tout $i \in \mathbb{N}$;*
2. *des signes non-logiques :*
   (a) *des signes pour les relations : "R_i" pour tout $i \in \mathbf{I}$;*
   (b) *des signes pour les fonctions : "f_i" pour tout $i \in \mathbf{J}$;*
   (c) *des constantes pour des individus : "c_i" pour tout $i \in \mathbf{K}$;*
3. *des signes auxiliaires : parenthèses, virgules*

Nous appelons les signes "$\forall$" et "$\exists$" des *'quantificateurs'*, les expressions de la même forme que "$\forall x$" et "$\exists x$" des *'quantifications des variables'* et les propositions de la forme "$\forall x(\ldots x \cdots)$" et "$\exists x(\ldots x \cdots)$" des *'phrases quantifiées'*.

Notons que $\mathcal{L}^+$ contient $\mathcal{L}$, au moins si nous nous imaginons toutes les propositions simples du dernier composées d'un prédicat (relation unaire) et d'une constante individuelle "Fa".[2] Nous utilisons le signe "$\doteq$" pour rendre claire qu'il s'agit d'un signe d'identité du *langage objet.* Comme signe d'identité dans le métalangage, nous utilisons "$=$".

Les signes non-logiques de notre alphabet jouent le rôle des propositions primitives de la logique propositionnelle : comme "p", "q" etc. sont des abréviations arbitraires pour des propositions simples de notre langage objet, les signes "R", "f" et "c" nous servent pour abréger n'importe quel signe de relation, de fonction et n'importe quelle constante. Comme dans le cas de la logique propositionnelle, on peut toujours s'imaginer ces signes remplacés par des expressions du français (du type syntaxique correspondant).

Les ensembles $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ sont des ensembles d'indices qui nous servent à distinguer les différentes symboles pour les relations, les fonctions et les individus. Au lieu de "x_1", "x_2", "x_3", nous écrivons parfois "x", "y", "z" pour les variables. Nous abrégeons l'ensemble de toutes les variables de la langue $\mathcal{L}^+$ par "$\mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+)$".

Les relations et les fonctions peuvent être unaires, binaires, tertiaires et ainsi de suite. C'est pourquoi nous appelons une '*langue*' $\mathcal{L}^+$ un alphabet – incluant un choix précis de signes non-logiques – avec un ensemble $\mathbf{K}$ d'indices pour les constantes et deux fonctions $\lambda : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mu : \mathbf{J} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qui déterminent l'adicité de nos signes de relations et de fonctions.[3] Une langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ pour la logique des prédicats est donc composée de connecteurs, de quantificateurs,

[2] Une autre provision est nécessaire, dont nous parlerons plus tard : les connecteurs propositionnelles, définis dans le langage de la logique propositionnelle comme reliant des propositions, relient dans la logique des prédicats des phrases qui peuvent être complètes *ou* ouvertes.

[3] Nous exluons une adicité de 0. Alternativement, nous aurions pu définir les constantes individuelles comme des fonctions d'adicité 0.

du signe d'identité, d'une infinité de variables individuelles, d'un certain nombre de relations et de fonctions ayant des adicités spécifiques et d'un certain nombre de constantes individuelles.

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un *terme* de notre langue $\mathcal{L}^+$:

Définition 2. *Les* termes *d'une langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ sont définis par les clauses récursives suivantes :*

1. *Toute variable "x_i" ($i \in \mathbb{N}$) est un terme.*
2. *Toute constante "c_i" ($i \in \mathbb{N}$) est un terme.*
3. *Si "t_1", "t_2", ..., "$t_{\mu(j)}$" sont des termes ($j \in \mathbf{J}$), alors "$f_j(t_1, t_2, \ldots, t_{\mu(j)})$" est un terme.*

Puisqu'elle utilise le prédicat à définir ("...est un terme"), cette définition est récursive, comme le sont les définition de formule atomique et de formule que nous donnerons par la suite. Ceci signifie qu'elle a la forme suivante :

1. Toute variable est un terme.
2. Toute constante est un terme.
3. Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions de la catégorie 1 ou 2 est un terme.
4. Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions de la catégorie 1, 2 et 3 est un terme.
5. Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions de la catégorie 1, 2, 3 ou 4 est un terme.
6. ...

La récursion dans la clause (3) de la définition donnée nous permet d'abréger les conditions (3), (4), (5) etc. de cette définition itérative (c'est-à-dire non-récursive). Les termes sont les expressions de notre langage qui nous servent pour désigner les objets du domaine de discours.

Nous définissons également les formules atomiques, qui jouent le rôle des propositions simples de la logique propositionnelle :

Définition 3. *ϕ est une* formule atomique *de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si un des suivants est le cas :*

1. *ϕ est de la forme "$t_1 \doteq t_2$" pour deux termes "t_1" et "t_2" ;*
2. *ϕ est de la forme "$R_i(t_1, t_2, \ldots, t_{\lambda(i)})$" pour des termes "$t_1$", "$t_2$", ..., "$t_{\lambda(i)}$" et $i \in \mathbf{I}$.*

Ayant à notre disposition l'équivalent de propositions simples, nous pouvons construire les formules complexes, en imitant la procédure pour les connecteurs de la logique propositionnelle :

Définition 4. *ϕ est une* formule *de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si un des suivants et le cas :*

1. *ϕ est une formule atomique ;*
2. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\neg\psi)\urcorner$ pour une formule ψ ;*
3. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\psi \wedge \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \vee \chi)\urcorner$,$\ulcorner(\psi \rightarrow \chi)\urcorner$ ou $\ulcorner(\psi \leftrightarrow \chi)\urcorner$, pour des formules ψ et χ ;*
4. *ϕ est de la forme $\ulcorner\forall x_i(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_i(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable "x_i", $i \in \mathbb{N}$.*

Nous économisons les parenthèses redondantes par les mêmes conventions que dans le cas de la logique propositionnelle. Nous écrivons "$\forall x, y, z(\ldots)$" au lieu de "$\forall x\ (\ldots \forall y\ (\ldots \forall z(\ldots)\ldots)\ldots)$" et "$\exists x, y, z(\ldots)$" au lieu de "$\exists x\ (\ldots \exists y\ (\ldots \exists z(\ldots)\ldots)\ldots)$".

Comme nous l'avons vu, il est crucial pour la sémantique de la logique des prédicats de distinguer entre les phrases complètes qui sont vraies ou fausses et des phrases ouvertes qui sont vraies ou fausses *de* certains objets. Cette distinction nous oblige de dire quand une variable a une occurrence "libre" dans une formule :

Définition 5. *Si ϕ est une formule et "x_i" une variable, nous disons que "x_i"* a une occurrence libre dans ϕ *si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

1. *ϕ est une formule atomique et contient "x_i" ;*
2. *ϕ a la forme $\ulcorner \neg\psi \urcorner$ et "x_i" a une occurrence libre dans ψ ;*
3. *ϕ a la forme $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$, $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$, $\ulcorner \psi \rightarrow \chi \urcorner$ ou $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$ et "x_i" a une occurrence libre ou bien dans ψ ou bien dans χ ;*
4. *ϕ a la forme $\ulcorner \forall x_j(\psi) \urcorner$ ou $\ulcorner \exists x_j(\psi) \urcorner$, $i \neq j$ et "x_i" a une occurrence libre dans ψ.*

Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle n'y est pas partout gouvernée par un quantificateur correspondant. Une expression est une phrase ouverte si et seulement si elle contient au moins une occurrence libre d'une variable. En conséquence, nous pouvons définir :

Définition 6. *Une* phrase *est une formule qui ne contient aucune occurrence libre d'une variable.*

Nous abrégeons par "ϕ", "ψ" etc. des noms pour des phrases arbitraires et par "$\ulcorner \phi(x) \urcorner$", "$\ulcorner \psi(x, y) \urcorner$" des noms pour des phrases ouvertes contenant des occurrences libres des variables "x" et des variables "x" et "y" respectivement.[4] Les résultats de la substitution des constantes individuelles "a" et "b" pour les variables sont désignés par "$\ulcorner \phi(a) \urcorner$" et "$\ulcorner \psi(a, b) \urcorner$" respectivement.

Nous disons que les occurrences de variables qui ne sont pas libres sont 'liées' – liées par un quantificateur dans la portée duquel ils se trouvent.[5]

Comme les connecteurs, les quantificateurs ont aussi une *portée* – la phrase ouverte qui est gouvernée par le quantificateur. La distinction entre

(i) Personne n'est heureux et personne n'est honnête.
(ii) Personne n'est heureux et honnête.

est que le premier quantificateur universel dans la première phrase ne gouverne que la phrase ouverte simple "x est heureux" bien que celui dans la deuxième phrase le quantificateur gouverne le phrase ouverte complexe "x est heureux et x est honnête" :

(i′) $\forall x$ $\neg$(x est heureux) $\wedge$ $\forall x$ $\neg$(x est honnête)
(ii′) $\forall x$ $\neg$(x est heureux $\wedge$ x honnête)

Par la première phrase, je fais deux assertions : que personne n'est heureux et que personne n'est honnête – s'il y a quelque chose qui est heureux ou s'il y a quelque chose qui est honnête j'ai également tort. Par la deuxième phrase, cependant, je fais une assertion beaucoup plus faible : je dis que personne n'est heureux et honnête *en même temps* – que tous ce qui sont heureux ne sont pas honnêtes et que tous ce qui sont honnêtes ne sont pas heureux.

Nous définissons la portée d'un quantificateur comme suit :

Définition 7. *Si ϕ est une formule qui contient une quantification d'une variable "x" (ou bien "$\forall x$" ou bien "$\exists x$"), nous appelons* la portée *de la variable "x" dans ϕ la formule la plus petite qui suit la quantification de "x".*

Dans les trois formules suivantes, nous avons deux occurrences d'un quantificateur universel :

Q1 $\forall x(Px) \rightarrow (\forall x(Qxy) \vee Rx)$
Q2 $\forall x(Px \rightarrow (\forall x(Qxy) \vee Rx))$
Q3 $\forall x(Px \rightarrow \forall x(Qxy \vee Rx))$

[4]Nous avons besoin des demi-crochet de Quine parce que les expressions "“...est triste”(x)", "“... aime $\cdots$”(x, y)" ne sont pas de formules bien-formées. Les expressions "x est triste", "x aime y" (ou, à titre équivalent, "...est triste" et"... aime $\cdots$"), par contre, que l'on obtient en substituant "...est triste" pour $\phi(\ldots)$" et "... aime $\cdots$" pour $\psi(\ldots, \cdots)$, sont des phrases ouvertes bien-formées.

[5]Voici quelques exemples. La variable "x" a une occurrence libre dans toutes les expressions suivantes : "x", "Fx", "$Fx \wedge Fy$", "$\exists y(Rxy)$", "$f(x)$" et "$\forall y \exists z(Fx \rightarrow Ryz)$". Elle a aussi une occurrence libre dans "$\exists x(Fx) \wedge Gx$" (la deuxième) et dans "$\forall y(Rxy) \rightarrow \exists x(Fx)$" (la première).

Dans **Q1**, la portée de premier quantificateur universel qui lie la variable "x" est "Px", dans **Q2** c'est "$Px \to (\forall x(Qxy) \vee Rx)$" et dans **Q3** c'est "$Px \to \forall x(Qxy \vee Rx)$". La portée de la deuxième quantification de "x", dans **Q1** et dans **Q2**, est "Qxy" et "$Qxy \vee Rx$" dans **Q3**. La variable "x" a une seule occurrence libre dans **Q1** (la troisième) et n'a pas d'occurrence libre dans **Q2** ou **Q3**. La variable "y", cependant, a des occurrences libres dans chacune des trois phrases considérées.

3 * La sémantique de la logique des prédicats

Après avoir défini, d'une manière rigoureuse, ce qu'est une langue pour la logique des prédicats, nous allons maintenant montrer comment il faut *interpréter* une telle langue, en donnant une sémantique pour la logique des prédicats.

Une interprétation d'une formule du langage de la logique propositionnelle consiste en l'attribution de valeurs de vérité à toutes les propositions simples que cette formule contient ; une telle attribution correspond à une ligne de la table de vérité pour le connecteur principal de la formule en question. Malheureusement, la sémantique de la logique des prédicats est compliquée par deux facteurs absents dans le cas de la logique propositionnelle :

1. la présence des signes non-logiques 'sub-sententielles' dans notre alphabet de base ;[6]
2. la présence des variables et, en conséquence, des phrases ouvertes.

La première difficulté signifie que nous ne pouvons pas simplement attribuer des valeurs de vérité à des phrases complètes, mais que nous sommes obligés d'interpréter les constantes et les signes de relations et de fonctions. C'est pourquoi nous introduisons la notion d'une 'structure'. La deuxième difficulté entraîne que même une interprétation du vocabulaire non-logique ne suffira pas comme interprétation de notre langue, puisque nous devons interpréter également les phrases ouvertes : nous avons besoin de la notion d'une 'assignation de valeurs' aux variables contenues dans une formule.

La définition suivante détermine quelles seront les valeurs des termes et des prédicats de notre langage. Pour les constantes et les variables, nous devons fixer un ensemble d'objet comme univers de discours – cet ensemble contient toutes les individus dont nous voulons parler à l'aide du langage en question.[7] Aux signes de relations correspondront des relations sur cet ensemble et aux signes de fonctions des fonctions de cet ensemble dans cet ensemble.[8]

Définition 8. *Soit* $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ *une langue de la logique des prédicats. Une* structure $\mathcal{A}$ *pour* $\mathcal{L}^+$ *consiste en :*

1. *un ensemble non-vide* $|\mathcal{A}|$*, appelé* 'l'univers de discours' *ou le* 'domaine' *de* $\mathcal{A}$ *;*
2. *une* interprétation *de toutes les signes de relations, qui attribue à tout* $i \in \mathbf{I}$ *une relation* $R_i^{\mathcal{A}}$ *sur* $|\mathcal{A}|$ *avec* $\lambda(i)$ *places argumentales, c'est-à-dire un sous-ensemble* $R_i^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$.[9]

[6] Une expression bien-formée est appelée 'sub-sententielle' si elle n'est pas une phrase.

[7] Nous reviendrons à la question des univers de discours vides plus tard, dans la leçon 12.

[8] Voici quelques exemples de structures :

1. l'ensemble de tous les êtres humaines, avec la relation d'amour, la fonction exprimée par "la mère de ..." et deux constantes individuelles, "Sam" pour Sam et "Marie" pour Marie ;
2. l'ensemble de tous les animaux, avec les relations exprimées par "x est un penguin" et "x adore y", aucune fonction et des constantes individuelles "c_1", "c_2", ..., "c_n" pour tous les kangourous ;
3. l'ensemble de tous les nombres naturels, avec la relation exprimée par "$x \leq y$", les fonctions de substraction, addition et multiplication et deux constantes individuelles pour les nombres 0 et 1.

[9] "$|\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$" désigne un produit cartésien, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les séquences, à $\lambda(i)$ membres, d'éléments de $|\mathcal{A}|$:

$$|\mathcal{A}|^{\lambda(i)} \quad := \quad \underbrace{|\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}| \times \ldots \times |\mathcal{A}|}_{\lambda(i) \text{ fois}}$$

3. *une* interprétation *de toutes les signes de fonctions, qui attribue à tout* $j \in \mathbf{J}$ *une fonction* $f_j^{\mathcal{A}}$ *sur* $|\mathcal{A}|$ *avec* $\mu(j)$ *places argumentales, c'est-à-dire une fonction* $f_j^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{\mu(j)} \rightarrow |\mathcal{A}|$.
4. *une* interprétation *de toutes les constantes, qui attribue à tout* $k \in \mathbf{K}$ *un élément fixe,* $c_k^{\mathcal{A}}$*, de* $|\mathcal{A}|$.

Nous utilisons des superscripts pour rendre clair que "$R^{\mathcal{A}}$", "$f^{\mathcal{A}}$" et "$c^{\mathcal{A}}$" désignent, respectivement, une relation, une fonction et un élément qui nous servent d'interpréter le signe de relation "R", le signe de fonction "f" et la constante "c" dans la structure $\mathcal{A}$.[10]

Nous appelons une telle structure une '*interprétation*' de notre langue et nous disons que nous 'interprétons' les formules de cette langue dans la structure en question.

Prenons une phrase de notre langage objet, par exemple "$R(a, b)$". Nous savons, données nos conventions typographiques, que "R" représente une relation et que "a" et "b" sont des constantes individuelles, représentant des objets de notre domaine. Une interprétation de ces signes consistera à une assignation d'une relation précise et des référents particuliers à "R", "a" et "b". Nous pouvons, par exemple, interpréter cette phrase dans l'ensemble de toutes les personnes, assigner la relation d'amour à "R", Marie à "a" et Jean à "b". La phrase sera donc vraie s'il est le cas et seulement s'il est le cas que Marie aime Jean.

Notons que la définition d'une structure ne nous dit encore rien sur l'interprétation des phrases ouvertes. Si nous prenons "$R(a, x)$" comme exemple, nous ne savons seulement qu'un objet satisfait cette phrase ouverte si et seulement si cet objet est aimé par Marie. Mais comment pouvons-nous rendre cette relation exprimée par "... est vrai de $\cdots$" plus précise ?

Dans le contexte d'une structure donnée, nous pouvons assigner des valeurs aux occurrences libres de nos variables :

Définition 9. *Soit* $\mathcal{L}^+$ *une langue de la logique des prédicats et* $\mathcal{A}$ *une structure pour* $\mathcal{L}^+$*. Une* assignation de valeurs *pour* $\mathcal{L}^+$ *est une fonction* h *qui assigne à toute variable* x_i *(*$i \in \mathbb{N}$*) exactement un élément de l'univers de discours :* $\quad h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$.

Une assignation de valeurs, en d'autres termes, est une interprétation 'conditionelle' des variables, 'conditionelle' parce qu'elle ne les interprète pas au niveau d'une structure (une possibilité logique), mais à l'intérieur une structure. La notion d'une assignation de valeurs nous permet, dans certaines conditions, de traiter les phrases ouvertes comme des phrases complètes.[11] La signification d'une phrase ouverte, telle que "x aime Marie", dépendera de l'assignation de valeurs dans le sens qu'une assignation de Sam à "x" nous donnera une phrase vraie, mais une assignation de Frédérique à "x" une phrase fausse.

Pour éviter l'ambiguïté, il est important qu'une assignation de valeurs soit une fonction : toute occurrence d'une variable doit être assignée à un seul objet.[12]

Une structure et une assignation de valeurs, prises ensemble, déterminent de quels objets nous parlons à l'aide de nos expressions de langage objet : la structure en question nous fournit les

[10] Alternativement, nous aurions pu dire qu'une structure $\mathcal{A}$ est une séquence de quatre éléments, $\mathcal{A} = \langle|\mathcal{A}|, h_{\mathbf{I}}, h_{\mathbf{J}}, h_{\mathbf{K}}\langle$, consistant d'un ensemble $|\mathcal{A}|$, d'une fonction qui assigne à tout signe de relation son interprétation $h_{\mathbf{I}} : R_i \mapsto R_i^{\mathcal{A}}$, une autre fonction qui assigne à tout signe de fonction son interprétation $h_{\mathbf{J}} : f_J \mapsto f_j^{\mathcal{A}}$ et une fonction qui assigne à toute constante un élément de l'univers de discours : $h_{\mathbf{K}} : c_k \mapsto c_k^{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$.

[11] Ceci n'est pas tout à fait exacte : il serait plus adéquat de dire qu'une assignation de valeurs nous permet de définir une notion générale, celle de la satisfaction, qui s'applique également aux phrases ouvertes et complètes et qui nous permet de définir la vérité d'une phrase ouverte comme cas limite.

[12] Une fonction est une relation et donc un sous-ensemble du produit cartésien de son domaine et de son codomaine. Une relation binaire qui relie des éléments d'un ensemble A et d'un ensemble B est un sous-ensemble de $A \times B$, c'est-à-dire un ensemble de paires $\{\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \ldots\}$ telles que tous les a_i sont des membres de A et tous les b_i sont des membres de B. Une telle relation est une *fonction* si et seulement si le membre de A détérmine uniquement le membre de B de son paire, c'est-à-dire ssi $a_1 = a_2 \rightarrow b_1 = b_2$. Comme le membre de B est alors uniquement individué par son correspondant dans A, on écrit "$f(a_i)$" pour b_i. Une fonction $f : A \rightarrow B$ avec domaine A et codomaine B est donc une relation, c'est-à-dire un sous-ensemble de $A \times B$ qui satisfait cette condition supplémentaire.

référents des constantes individuelles et l'assignation de valeurs les valeurs, sous cette assignation, des occurrences libres de nos variables. Comme les fonctions sont également interprétées dans la structure, nous pouvons donc déterminer sans univoque la référence ou la désignation de tous nos termes singuliers. Ceci est rendu explicite par la définition qui suit :

Définition 10. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. La* désignation $\bar{h}(t)$ *d'un terme "t" de $\mathcal{L}^+$ sous cette assignation de valeurs est définie comme suit :*

1. *si "t" est une variable, $\bar{h}(t)$ est $h(t)$;*
2. *si "t" est une constante "c_k", $\bar{h}(t)$ est $c_k^{\mathcal{A}}$;*
3. *si "t" est un terme de la forme"$f_j(t_1, \ldots t_{\mu(j)})$", alors $\bar{h}(t)$ est $f_j^{\mathcal{A}}(\bar{h}(t_1), \ldots, \bar{h}(t_{\mu(j)}))$.*

Une interprétation détermine à quels objets se refèrent nos termes singuliers et quels objets sont représentés par nos variables : c'est ainsi qu'une assignation de valeurs h et une structure $\mathcal{A}$ déterminent ensemble la fonction $\bar{h}$ qui associe à tous nos termes singuliers et nos variables leurs désignations (dans une structure et sous une assignation de valeurs).

Au lieu de dire que les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses mais vraies ou fausses *de* certains objets, nous pouvons maintenant dire qu'elles sont vraies ou fausses *sous une assignation de valeurs* aux variables dont elles contiennent des occurrences libres. Cette notion de vérité-sous-une-assignation-de-valeurs est la notion clef de la sémantique de la logique des prédicats :

Définition 11. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est* vraie sous l'assignation de valeurs h *ou que l'assignation de valeurs h* satisfait *la formule ϕ (abrégé : "$\mathcal{A} \models_h \phi$") si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

S1	*ϕ a la même forme que "$t_1 \doteq t_2$"*	*et*	$\bar{h}(t_1) = \bar{h}(t_2)$
S2	*ϕ a la même forme que "$R_i(t_1, \ldots, t_{\lambda(i)})$"*	*et*	$R_i^{\mathcal{A}}(\bar{h}(t_1), \ldots, \bar{h}(t_{\lambda(i)}))$
S3	*ϕ est de la forme $\ulcorner \neg\psi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$
S4	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *et* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S5	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *ou bien* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S6	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \rightarrow \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$ *ou bien* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S7	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *si et seulement si* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S8	*ϕ est de la forme $\ulcorner \forall x_i(\psi) \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour tous les* $a \in |\mathcal{A}|$
S9	*ϕ est de la forme $\ulcorner \exists x_i(\psi) \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour au moins un* $a \in |\mathcal{A}|$

Nous rajoutons le signe de l'assignation de valeurs au signe de conséquence sémantique et écrivons "$\models_h$" pour indiquer qu'il ne s'agit pas, comme dans le cas de la logique propositionnelle, d'une relation entre un ensemble de propositions et une proposition, mais d'une relation ternaire entre une structure, une assignation de valeurs et une proposition.

Nous disons qu'une phrase ouverte est *satisfiable dans une structure* s'il y a une assignation de valeurs qui la satisfait. Elle est *consistante* s'il y a une structure dans laquelle elle est satisfiable. Un ensemble de propositions Σ est satisfiable ou consistant si tous ses membres $\phi \in \Sigma$ le sont. Comme avant, dire que Σ est consistant revient à dire qu'il est logiquement possible que toutes les propositions dans Σ soient vraies ensembles, qu'elles décrivent une possibilité logique : une possibilité logique, dans la logique des prédicats, correspondra donc à une structure et une assignation de valeurs.

Remarquons que ces conditions de vérité-sous-une-assignation sont 'disquotationelles' : ce qui est affirmé dans le langage objet est simplement 're-traduit' dans le métalangage. Les conditions de vérité disquotationelles les plus fameuses sont ceux qui ont la forme du schéma **T** de Tarski :[13]

"La neige est blanche" est vraie $\iff$ La neige est blanche.

[13]La condition qu'un prédicat de vérité doit rendre vraie toutes les instances du schéma **T**, chez Tarski (1936),

C'est justement la trivialité de cette condition de vérité pour “La neige est blanche” qui nous assure de sa correction. Si nous abrégeons “la neige” par “a” et “…est blanc” par “Fx”, la clause **S2** de la définition de la satisfaction nous donne :

$$\text{“}Fa\text{” est vraie dans } \mathcal{A} \quad\Longleftrightarrow\quad a^{\mathcal{A}} \in F^{\mathcal{A}}$$

Nous voyons ainsi que **S1** et **S2** disent que les propositions qui affirment une identité ou que certaines choses se trouvent dans une certaine relation sont vraies sous une assignation de valeurs si et seulement si les choses dites identiques sont réellement traitées comme étant identiques par cette assignation de valeurs et les choses dont on dit qu'elles se trouvent dans une certaine relation R_i se trouvent réellement dans cette relation d'après l'assignation de valeurs en question. En bref, elles disent que les propositions atomiques sont vraies si elles représentent les choses comment elles sont d'après l'assignation en question.

Les conditions **S3** à **S7** répètent les clauses que nous avons données pour la sémantique des connecteurs propositionnels, sauf qu'elles sont maintenant appliquées également à des connecteurs qui relient des phrases ouvertes.[14]

Les deux clauses pour les quantificateurs sont plus difficiles à comprendre. Elles utilisent une notion que nous n'avons pas encore introduite, celle d'une ‘assignation variée à la place “x” ’. Ce que nous voulons dire, en stipulant la condition **S9**, est qu'une formule quantifiée existentiellement soit vraie dans $\mathcal{A}$ sous h s'il y a et seulement s'il y a un objet dans l'univers du discours dont est vraie la phrase ouverte précédée par le quantificateur existentiel. Nous ne savons pas, cependant, si l'assignation h en question assigne cet objet à l'occurrence libre de la variable dans la phrase ouverte. Nous avons donc besoin de changer l'assignation en question, pour rendre sûr qu'elle assigne le bon objet. C'est ce qui nous permet la définition suivante :

Définition 12. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$, $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}+) \rightarrow |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs et “x_i” une variable de $\mathcal{L}^+$. Nous définissons* l'assignation variée à la place “x_i” *– appelée “$h\binom{x_i}{a}$” – comme suit :*

$$h\binom{x_i}{a}(x_j) \quad := \quad \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

$h\binom{x_i}{a}$ est une fonction qui assigne à toutes les variables sauf “x_i” le même individu que leur assigne h et assigne a à “x_i” – c'est une modification locale de l'assignation h à la place “x_i” qui la force d'assigner a à “x_i”.

S8 dit, en conséquence, qu'une formule universellement quantifiée est vraie sous une assignation de valeurs si la phrase ouverte est et seulement si elle est vraie sous toute modification de cette assignation et donc sous toute assignation d'un élément du domaine à la variable en question. Une quantification universelle est vraie juste au cas où la phrase ouverte gouvernée par le quantificateur universel est satisfaite si l'on prend en compte toutes les valeurs possibles de ses variables. **S9**, de l'autre côté, dit qu'une proposition existentielle est vraie sous une assignation de valeurs s'il y a

joue le rôle d'un critère d'adéquation pour une définition de vérité. Selon lui, tout prédicat “Fx” qui ne satisfait pas la condition suivante ne mérite pas le nom d'un prédicat de vérité :

$$\text{“La neige est blanche” est } F \quad\Longleftrightarrow\quad \text{La neige est blanche.}$$

La présence des phrases auto-référentielles, cependant, nous interdit de prendre simplement la totalité de toutes ces équivalences comme définition de la vérité ; en substituant “cette phrase est fausse” dans le schéma **T**, nous obtenons une contradiction.

[14] Comme nous les avons définis les connecteurs propositionnels, les connecteurs reliant des phrases ouvertes ne sont pas des connecteurs propositionnels. Strictement parlant, il n'est donc pas vrai que les formules bien-formées de la logique propositionnelle sont aussi des formules bien-formées du calcul des prédicats. Nous aurions pu, cependant, définir les connecteurs dès le début et pour des phrases complètes et pour des phrases ouvertes – dans la logique propositionnelle, nous n'aurions donc traité que d'un de ces cas.

et seulement s'il y a, dans l'univers de discours en question, au moins un individu qui peut être assigné comme valeur à la variable ayant une occurrence libre dans la phrase ouverte en question.

4 La notion de validité

Une formule est vraie sous une assignation de valeurs si et seulement si l'assignation des valeurs à ses variables correspond à la manière dont ces variables sont reliées dans la proposition. En examinant les clauses **S1** à **S9**, nous remarquons que leurs résultats pour certaines propositions ne dépend pas de l'assignation h en question. Si nous choisissons, par exemple, la proposition "$\forall x(0 \leq x)$" et nous l'évaluons dans la structure des nombres naturels (et avec l'interprétation de "$\leq$" par la relation de n'être pas plus grand que), **S8** nous donnera le résultat qu'elle est vraie sous toutes les assignations. La raison pour cela est simple : il n'y a rien à assigner à cette proposition, puisqu'elle ne contient pas d'occurrence libre d'une variable (la seule variable qu'elle contient, "x", a une seule occurrence et celle-là est gouvernée par le quantificateur universel).

Cette observation se généralise : il est vrai de toutes les *phrases* que leurs valeurs de vérité ne dépendent pas d'une assignation de valeurs particulière. Une phrase ne contient pas d'occurrence libre d'une variable, donc il n'y a rien à assigner – si elle est vraie, elle est vraie sous toutes les assignations, si elle est fausse, elle n'est vraie sous aucune. Nous obtenons ainsi la notion de vérité (ne s'appliquant qu'à des phrases complètes) comme cas limite de la notion de vérité-sous-une-assignation (qui s'applique également à des phrases ouvertes) et pouvons adopter la définition suivante :

Définition 13. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est* vraie dans la structure $\mathcal{A}$ *si et seulement si ϕ est vraie sous toutes les assignations de valeurs pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\mathcal{A} \models \phi \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \text{pour tout } h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}| \ : \quad \mathcal{A} \models_h \phi$$

*Si ϕ est vraie dans une structure $\mathcal{A}$, nous appelons $\mathcal{A}$ un '*modèle*' de ϕ.*

Cette définition de vérité-dans-une-structure comme vérité-sous-toutes-les-assignations est essentiellement celle de Tarski (1936). La notion de vérité-dans-une-structure est une généralisation de la notion ordinaire de vérité, qui traite le monde actuel comme seule structure digne d'intérêt. En logique, nous nous intéressons pas à ce qui est vrai ou faux dans une structure particulière : nous nous intéressons à ce qui est vrai dans toutes les structures (aux tautologies) et aux relations qu'il y a entre les vérités dans différentes structures (aux relations de conséquence sémantique).

Pour arriver à une notion de vérité logique, nous devons donc généraliser sur toutes les structures :

Définition 14. *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est* valide *ou qu'elle est une* vérité logique *(de la logique des prédicats) si et seulement si ϕ est vraie dans toutes les structures pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\models \phi \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \text{pour tout } \mathcal{A} \ : \quad \mathcal{A} \models \phi$$

Nous appelons une formule ϕ une conséquence sémantique *d'un ensemble de formules si et seulement si ϕ est vraie dans toutes les structures où toutes ces formules sont vraies :*

$$\Sigma \models \phi \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \text{pour tout } \mathcal{A} : \text{si } \mathcal{A} \models \psi \text{ pour toutes les formules } \psi \in \Sigma, \text{ alors } \mathcal{A} \models \phi$$

Cette définition de validité nous permet de compter comme valide ou logiquement vraies des phrases qui ne sont pas des tautologies de la logique propositionnelle. Prenons par exemple la phrase ouverte suivante :

$$(x \doteq y) \rightarrow (Rxb \rightarrow Ryb) \tag{8}$$

Interprétée dans une certaine structure, (8) dit, par exemple, que si la valeur de la variable "x" est la même que la valeur de la variable "y", alors si x aime Marie, alors y aime Marie. La vérité de (8) ne dépend pas de la valeur des variable "x" et donc de l'assignation de valeurs en question – quelque soit l'assignation particulière, si elle assigne le même individu à ces deux variables, alors l'amour de Marie ne distinguera pas leurs référents. Nous voyons également que la vérité de (8) ne dépend pas non plus de l'interprétation particulière de "R", ni ce celle de "b" – si nous l'interprétons comme "si les valeurs de "x" et de "y" sont les mêmes, alors si un des deux dépend de Dieu, alors l'autre en dépend également", elle est également vraie. La phrase (8) est donc vraie dans toutes les structures, et sous toutes les assignations, donc logiquement vraie et valide.

Qu'est-ce qui change si nous préfixons (8) de deux quantificateurs universels qui lient les variables "x" et "y" qui ont des occurrences libres dans (8) ?

$$\forall x \forall y \ ((x \doteq y) \rightarrow (Rxb \rightarrow Ryb)) \tag{9}$$

Nous avons déjà vu que la validité d'une phrase ne dépend jamais d'une assignation de valeurs. Nous appelons "*clôture universelle*" d'une formule ϕ une formule la formule obtenue en adjoignant à ϕ des quantificateurs universels correspondant à chaque variable qui a une occurrence libre dans ϕ. Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 15. *Une formule est valide si et seulement si sa clôture universelle est valide.*

PREUVE Soit $\mathcal{A}$ une structure arbitraire. ϕ est valide si et seulement si ϕ est vraie dans $\mathcal{A}$ sous toutes les assignations de valeurs possibles. Étant donné **S8**, cette condition est nécessaire et suffisante pour la vérité, dans $\mathcal{A}$, de la clôture universelle de ϕ. $\square$

Nous voyons donc que (8) sera valide si et seulement si sa clôture universelle (9) est également valide.

Nous avons comme un exemple d'une équivalence sémantique (conséquence sémantique réciproque) le suivant. Soit ϕ une formule contenant n occurrence libres de variables différentes "x_1", ..."x_n" :

$$\mathcal{A} \models \phi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{A} \models \ulcorner \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \ (\phi) \urcorner \tag{10}$$

Il est à remarquer que cette équivalence est vraie seulement au niveau de la validité : si ϕ est valide, c'est-à-dire vraie dans toutes les structures et sous toutes les assignations de valeurs, alors sa clôture universelle l'est aussi, et vice versa. Au niveau d'une structure et d'une assignation particulière, une formule et sa clôture universelle peuvent très bien différer. Soit $\mathcal{A}$, par exemple, une structure dont l'univers de discours sont tous les animaux et "Px" est interprété par l'ensemble de tous les pengouins. Sous une assignation particulière – une assignation qui assigne un pengouin à "x", "Px" sera vraie. Mais ceci ne veut pas dire que tous les animaux sont des pengouins, ni que, sous cette assignation, "$\forall x(Px)$" sera également vraie.

5 La logique des prédicats unaires

A part des équivalences sémantiques du type de (10) nous avons également affaire à un autre type d'équivalences – plus fortes, parce qu'il ne s'agit non seulement des équivalences entre la vérité des formules dans une structure, mais d'équivalences reliantes la *satisfaction* de quelques formules dans des structures par des assignations de valeurs. Un exemple d'une telle équivalence est l'interdéfinissabilité des quantificateurs que nous avons déjà rencontrée dans la leçon 8 :

Théorème 16. *Soit ϕ une formule, $\mathcal{A}$ n'importe quelle structure pour la logique des prédicats et h n'importe quelle assignation de valeurs aux variables de $\mathcal{L}^+$:*

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{A} \models_h \ulcorner\forall x\ (\phi(x))\urcorner & \iff & \mathcal{A} \models_h \ulcorner\neg\exists x\ \neg(\phi(x))\ulcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner\exists x\ (\phi(x))\urcorner & \iff & \mathcal{A} \models_h \ulcorner\neg\forall x\ \neg(\phi(x))\ulcorner
\end{array}$$

D'autres équivalences définitionnelles de ce dernier type, appelées "règles de passage" par Quine (1950: 142–148), nous disent sous quelles conditions nous pouvons "entrer" et "sortir" des quantificateurs :

Théorème 17. *Soit ϕ une formule et ψ une formule dans laquelle la variable "x" n'a pas d'occurrence libre. Si $\mathcal{A}$ est n'importe quelle structure pour la logique des prédicats et h n'importe quelle assignation de valeurs aux variables de $\mathcal{L}^+$, nous avons les équivalences suivantes :*

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} \models_h \ulcorner\forall x(\phi \vee \psi)\urcorner & \iff & \mathcal{A} \models_h \ulcorner\forall x(\phi) \vee \psi\urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner\exists x(\phi \vee \psi)\urcorner & \iff & \mathcal{A} \models_h \ulcorner\exists x(\phi) \vee \psi\urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner\forall x(\phi \wedge \psi)\urcorner & \iff & \mathcal{A} \models_h \ulcorner\forall x(\phi) \wedge \psi\urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner\exists x(\phi \wedge \psi)\urcorner & \iff & \mathcal{A} \models_h \ulcorner\exists x(\phi) \wedge \psi\urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner\forall x(\psi \rightarrow \phi)\urcorner & \iff & \mathcal{A} \models_h \ulcorner\psi \rightarrow \forall x(\phi)\urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner\exists x(\psi \rightarrow \phi)\urcorner & \iff & \mathcal{A} \models_h \ulcorner\psi \rightarrow \exists x(\phi)\urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner\forall x(\phi \rightarrow \psi)\urcorner & \iff & \mathcal{A} \models_h \ulcorner\exists x(\phi) \rightarrow \psi\urcorner \\
\mathcal{A} \models_h \ulcorner\exists x(\phi \rightarrow \psi)\urcorner & \iff & \mathcal{A} \models_h \ulcorner\forall x(\phi) \rightarrow \psi\urcorner
\end{array}$$

PREUVE Des quatre premières équivalences, nous ne prouvons que la première : on en obtient la deuxième par l'interdéfinissabilité de $\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$ et $\ulcorner\neg\exists x\neg(\phi)\urcorner$ et la troisième et la quatrième par l'interdéfinissabilité des connecteurs.

Soit $\mathcal{A}$ une structure arbitraire et h une assignation de valeurs. Si $\ulcorner\forall x(\phi \vee \psi)\urcorner$ est vraie dans cette structure et sous cette assignation, $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ est vraie sous toute assignation variée à la place "x". Si c'est le premier disjoint ϕ qui est vrai, rien ne se change dans $\ulcorner\forall x(\phi) \vee \psi\urcorner$. Si c'est le deuxième disjoint ψ, une assignation variée à la place "x" sera juste une assignation ordinaire, puisque la variable "x" n'a pas d'occurrence libre dans ψ. En conséquence, $\ulcorner\forall x(\phi) \vee \psi\urcorner$ sera également vraie sous cette assignation. La converse est prouvée d'une manière similaire.

La cinquième et la sixième équivalence sont obtenues de la première et la deuxième par l'équivalence entre $\ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \vee \neg\psi\urcorner$.

Pour la septième équivalence, notons que $\ulcorner\forall x(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ est équivalente à $\ulcorner\forall x(\neg\phi \vee \psi)\urcorner$ et donc, par la première équivalence, à $\ulcorner\forall x(\neg\phi) \vee \psi\urcorner$. Par l'interdéfinissabilité des quantificateurs, les formules de cette dernière forme sont équivalentes à $\ulcorner\neg\exists x(\phi) \vee \psi\urcorner$, dont nous obtenons $\ulcorner\exists x(\phi) \rightarrow \psi\urcorner$.

Pour la huitième équivalence, nous transformons $\ulcorner\exists x(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ en $\ulcorner\exists x(\neg\phi \vee \psi)\urcorner$, en $\ulcorner\exists x(\neg\phi) \vee \psi\urcorner$, en $\ulcorner\neg\forall x(\phi) \vee \psi\urcorner$ et puis en $\ulcorner\forall x(\phi) \rightarrow \psi\urcorner$. $\square$

Les quatre premières équivalences nous permettent de faire entrer et de sortir des conjoints et des disjoints de la portée d'un quantificateur s'ils ne contiennent pas de variable qui est liée par celui-ci. La cinquième et sixième équivalence nous permettent de faire la même chose avec les antécédents des implications. La septième et la huitième, par contraire, nous montrent que les antécédents des implications sont implicitement niées et qu'il faut par conséquent changer le quantificateur en question en son quantificateur dual si on veut distribuer un quantificateur à travers une implication dont il quantifie l'antécédent.

Les équivalences prouvées nous montrent comment nous pouvons faire entrer et sortir des quantificateur à travers des connecteurs *si une des formules ne contient pas d'occurrence libre de la variable qui est quantifiée par le quantificateur correspondant.*[15] La qualification est importante : si nous avons affaire à un prédicat binaire dont les deux places argumentales sont gouvernées par différents quantificateurs, nous ne pouvons pas recourir à ces équivalences. Il n'aura, par exemple, aucune manière de transformer "$\forall x(Fx \to \exists y(Rxy))$" en "$\exists x(Fx) \to \exists y(Rxy)$".

Ceci nous oblige d'accepter, pour des relations binaires, des quantifications 'mixtes' (contenant une alternation de quantificateurs universels et existentiels) que nous ne pourrons pas distribuer sur les parties de la phrase ouverte complexe qu'elles gouvernent. Il est important à noter, cependant, que ce cas n'arrivera pas avec des prédicats unaires : dans la logique des prédicats unaires, toute formule peut être transformée (préservant la satisfaction par une assignation) en une forme *en forme prénex*, où toutes les quantificateurs se trouvent au début de la formule, et toutes les quantifications peuvent également être transformées en une forme *purifiée*, où la portée de chaque quantificateur ne comprend que des formules atomiques dans lesquelles la variable quantifiée a une occurrence libre.

Nous pouvons nous demander alors qu'elle en serait le résultat si nous nous limiterions à des prédicats unaires : Le changement sera dramatique : la logique des prédicats, incluant des signes de relations (binaire), est indécidable (ce que nous verrons dans la leçon 12) ; la logique des prédicats unaires, par contre, est décidable et permet un teste de validité simple et efficace.[16]

Nous notons d'abord que, grâce à l'équivalence sémantique de toute formule avec sa clôture universelle, le problème de trouver une procédure de décision peut se limiter aux phrases, formules qui ne contiennent pas d'occurrence libre de variables. Nous pouvons maintenant appliquer, à n'importe quelle phrase ϕ de $\mathcal{L}^+$ ne contenant que des prédicats unaires, les règles suivantes pour determiner si oui ou non elle est valide.

1. Si ϕ ne contient pas de quantificateurs (et est appelée alors "booléen"), alors ϕ est valide si et seulement si la configuration de ces prédicats correspond à une tautologie propositionnelle (remplaçant "Fx" par "p", "Gx" par "q" etc.).[17]
2. Si ϕ est $\ulcorner \exists x(\psi) \urcorner$ pour une proposition booléenne ψ, alors ϕ est valide si et seulement si ψ est valide d'après (1).
3. Si ϕ est $\ulcorner \neg\exists x(\psi) \urcorner$ pour une proposition booléenne ψ, alors ϕ est valide si et seulement si ψ est inconsistante d'après (1).
4. Si ϕ est une disjonction de proposition de la forme t $\ulcorner \neg\exists x(\psi_i) \urcorner$ pour des propositions booléennes ψ_i, alors ϕ est valide si au moins un de ces disjoints est valide d'après (3).
5. Si ϕ est l'implication d'une proposition du type (2) de une ou plusieurs propositions du type (2), alors ϕ est valide si et seulement si un des propositions dans son antécédent implique sont conséquent dans le sens de (1).
6. Si ϕ est une conjonction de propositions du type (2) à (5), alors ϕ est valide si et seulement si chacun de ces conjoints est valide d'après (2) à (5).

La condition (1), en effet, réduit le problème de déterminer la validité d'une proposition contenant des occurrences libres d'une seule variable et ne contenant aucun quantificateur au problème correspondant de la logique propositionnelle.

Il nous reste à voir que toutes les propositions de la logique des prédicats unaires tombe sous une des catégories mentionnées. Utilisant le fait que toute phrase de la logique des prédicats unaires

[15] Ceci n'est pas vrai de toutes les équivalences notées. La deuxième et la troisième sont valides peut importe si oui non ψ contient des occurrences libres de la variable "x". Les formules "$\forall x(Fx \vee Gx) \to (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$" et "$(\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)) \to \exists x(Fx \wedge Gx)$", par contre, ne sont pas valides.

[16] Dans la présentation de la procédure de décision pour la logique des prédicats unaires, je suis Quine (1950: 121–128).

[17] "$Fx \vee \neg Fx$" et "$(Fx \wedge \neg Fx) \to Gx$", par exemple, sont valides pour cette raison. S'il y a une interprétation propositionnelle qui rend vraie la formule propositionnelle correspondante, alors il y aura, dans toute structure (qui, d'après nos définitions, contiendra au moins un objet) une assignation de valeurs qui rend vraie la phrase ouverte. S'il n'y a, par contre, pas d'interprétation propositionnelle, il y aura une interprétation qui rend la phrase ouverte faux de cet objet.

est équivalente à une en forme prénex, nous montrons comme suit que notre teste détermine la validité de n'importe quelle phrase. Soit ϕ une proposition arbitraire ne contenant que des prédicats unaires :

1. Si ϕ contient des quantificateurs universels ou des négations de quantificateurs universels, nous appliquons les lois d'interdéfinissabilité des quantificateurs pour les changer en des quantificateurs existentiels.
2. Nous transformons le résultat de (1) dans une forme normale conjonctive, à savoir une conjonction de disjonctions. D'après (6), le teste de validité sera appliqué aux conjoints individuellement.
3. Toute disjonction qui apparaît dans la formule sera une disjonctions de propositions du type (2) ou (3). Puisque le quantificateur existentiel distribue sur les disjonctions, toute disjonction sera une disjonction d'au plus une proposition du type (2) et de quelques (peut-être plusieurs) disjonctions du type (3). Il ne reste que quatre cas possible :
   (i) Si ϕ n'est qu'une seule proposition du type (3), elle tombe sous (3).
   (ii) Si ϕ est une disjonction de plusieurs propositions du type (3), elle tombe sous (4).
   (iii) Si ϕ ne contient qu'une seule proposition du type (2), elle tombe sous (2).
   (iv) Si ϕ contient plusieurs propositions du type (3) et une seule proposition du type (2), elle tombe sous (5), puisque "$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee q$" est équivalent à "$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$".

Nous voyons donc que notre teste de validité s'applique à toutes les propositions de la logique des prédicats unaires et pouvons énoncer le théorème suivant, découvert par Löwenheim (1915) :

Théorème 18. *La logique des prédicats unaires est décidable.*

Preuve Nous venons d'esquisser une procédure de décision, appliquable à n'importe quelle formule de $\mathcal{L}^+$ qui ne □

6 La généralité multiple

Un quantificateur quantifie une phrase ouverte, qui peut être complexe, et qui est appelée 'la portée' du quantificateur en question. C'est cette construction qui permet à la logique des prédicats de surmonter la difficulté principale que rencontre la syllogistique : la généralité multiple. C'est également dû à cette notion importante que la logique des prédicats surpasse les prédicats unaires et a un pouvoir expressif beaucoup plus grand que cette dernière. Le prix à payer pour ce gain d'expressivité, cependant, sera l'indécidabilité de la logique des prédicats (cf. la leçon 12).

Considérons les phrases suivantes :

(i) Tous les garçons aiment une fille.

(ii) Ce monsieur a écrit un livre sur tout.

Ces deux exemples sont des cas d'ambiguïtés structurales : aucun constituant n'est ambigu lexicalement et pourtant la phrase complète est ambiguë. La syllogistique n'a pas les ressources qui permettent d'enlever l'ambiguïté, puisqu'elle nous force à classifier chaque proposition comme étant ou bien particulière ou bien universelle.

Dans la logique des prédicats, cependant, nous pouvons réitérer des quantificateurs. "...aime $\cdots$", par exemple, est un prédicat doublement incomplet et donc admet deux quantifications différentes. Afin de le compléter partiellement, nous pouvons, par exemple, quantifier sur la deuxième position argumentale. Nous obtenons "$\exists y$(...aime y)" – une expression qui est toujours incomplète : un objet satisfait ce prédicat juste au cas où il aime quelque chose ; s'il y a et seulement s'il y a quelque chose qui est aimé par cet objet. Le prédicat "$\exists y$(...aime y)" est donc équivalent à "...aime quelque chose". Nous pouvons maintenant le compléter : "$\forall x(\exists y(x \text{ aime } y))$" – une phrase qui dit que tout objet est tel que cet objet aime quelque chose – une interprétation qui laisse ouverte la possibilité que différents objets aiment différentes choses.

Nous pouvons, cependant, inverser l'ordre de ces deux étapes et obtenir un résultat différent : au lieu de d'abord quantifier existentiellement sur la deuxième position argumentale, nous pouvons d'abord lier la première position par un quantificateur universel. Ainsi nous obtenons "$\forall x(x$ aime $\ldots)$", une phrase ouverte qui est vraie d'un objet si et seulement si cet objet est aimé par tout le monde. Si nous quantifions existentiellement la position e la variable libre, nous arrivons à "$\exists y(\forall x(x \text{ aime } y))$" – une phrase qui dit qu'il y a quelque chose qui est aimé par tout le monde ; que tout le monde aime la même chose. Nous sommes donc arrivés à une représentation logique de la phrase structurellement ambiguë : nous avons distingué deux formes logiques différentes que l'on peut donner à **(i)**.

Imaginons que **(i)** est dit d'un groupe comprenant deux garçons et deux filles. L'ambiguïté de **(i)** réside dans le fait que deux scénarios différents peuvent rendre la phrase vraie : dans un scénario, tous les garçons aiment une fille – Paul aime Marie et Marcel aime Pauline. Dans un deuxième scénario, non seulement tous les garçons sont amoureux mais en plus ils sont tous amoureux de la même fille : Paul et Marcel aiment Pauline et personne n'aime Marie. Il y a donc une seule fille qui est aimée par tous les garçons. Ce dernier scénario correspond à la deuxième des deux interprétations suivantes de (i) :

(i′) $\forall x$ (x est un garçon $\rightarrow$ $\exists y(y$ est une fille $\wedge$ x aime $y))$

(i″) $\exists y$ (y est une fille $\wedge$ $\forall x(x$ est un garçon $\rightarrow$ x aime $y))$

La différence logique entre ces deux propositions est que dans la première, **(i′)**, le quantificateur existentiel se trouve dans la portée du quantificateur universel bien que dans la deuxième, **(i″)**, le quantificateur universel se trouve dans la portée du quantificateur existentiel. Dans **(i′)**, nous nous trouvons dans la portée du quantificateur universel lorsque nous choisissons un y qui rend vraie la phrase ouverte : nous pouvons faire dépendre notre choix du x de la valeur de "y" en question. Dans **(i″)**, cependant, nous n'avons pas cette liberté : le y doit être choisi tout au début et il est dit de ce y que tous les x l'aiment.

Le même type d'ambiguïté se trouve dans le cas de **(ii)** : ou bien le monsieur en question a écrit un livre qui traite de toutes les choses **(ii″)**, ou bien, sur n'importe quel sujet, ce monsieur a écrit au moins un livre **(ii′)** :

(ii′) $\forall x$ $(\exists y(y$ est un livre de ce monsieur $\wedge$ y est sur $x))$

(ii″) $\exists y$ $(\forall x(y$ est un livre de ce monsieur $\wedge$ y est sur $x))$

La première phrase dit que le monsieur, le long de sa carrière, a publié sur tous les sujets ; la deuxième qu'il a publié un livre qui traite de tout.

On remarque une conséquence sémantique : **(i″)** implique **(i′)** et **(ii″)** implique **(ii′)** – si tous les garçons aiment la même fille, tous les garçons aiment au moins une fille ; quelqu'un qui a publié un livre qui traite de tout a publié sur tous les sujets. La conséquence sémantique converse, cependant, n'obtient pas : il est très bien possible que tous les garçons sont amoureux, mais ne sont pas amoureux de la même fille, et que le monsieur a publié sur tout, mais traité de différents sujets dans différents livres. Nous avons donc le suivant, pour toute structure $\mathcal{A}$ et toute assignation de valeurs h, mais pas sa converse :

$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x_1 \forall x_2 \ (\phi) \urcorner \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x_2 \exists x_1 \ (\phi) \urcorner$$

La formalisation des phrases du langage ordinaire en termes d'une langue de la logique de prédicats est souvent compliquée par le fait que le langage ordinaire contient beaucoup d'occurrences d'une généralité implicite, comme dans l'exemple suivant :

(i) Toutes les filles bien-élevées aiment un prince.

Comparée à d'autres phrases comme "toutes les filles bien-élevées aiment leur père" ou "toutes les filles bien-élevées aiment leur père", (**i**) est ambigüe entre :

(**i**′)	$\forall x((Fx \wedge Bx) \rightarrow \exists y(Py \wedge Axy))$	toutes les filles bien-élevées aiment quelque prince
(**i**″)	$\forall x((Fx \wedge Bx) \rightarrow \forall y(Py \rightarrow Axy))$	toutes les filles bien-élevées aiment n'importe quel prince

Références

Leopold Löwenheim, 1915, "Über Möglichkeiten im Relativkalkül", *Mathematische Annalen* 76, pp. 447–470, reprinted and translated in van Heijenoort (1967).

Willard van Orman Quine, 1950, *Methods of Logic*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press.

Alfred Tarski, 1936, "Der Wahrheitsbegriff in den formalizierten Sprachen", *Studia Philosophica* 1, pp. 261–405.

Jan van Heijenoort (éd.) 1967, *From Frege to Gödel : A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press.