Introduction à la logique

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Matériel à disposition à l'examen du 3 février, 2004

Syntaxe

Le langage de la logique propositionnelle

Définition 1. *L'*alphabet *du langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle classique consiste en les signes suivants :*

1. *des propositions atomiques "p_0", "p_1", "p_2" …(une infinité dénombrable)*
2. *les connecteurs "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$" et "$\leftrightarrow$"*
3. *des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules*

Définition 2. *Une* formule propositionnelle *est définie comme suit :*

1. *Toute proposition atomique "p_i" ($i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*
2. *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*
3. *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Définition 3. *Une* théorie *est un ensemble (fini ou infini) de formules propositionnelles.*

Le langage de la logique des prédicats

Définition 4. *L'*alphabet *du langage $\mathcal{L}^+$ de la logique des prédicats consiste en les signes suivants :*

1. *des signes logiques :*
   (a) *les connecteurs "$\neg \ldots$" ("ne-pas"), "$\ldots \wedge \cdots$" ("et"), "$\ldots \vee \cdots$" ("ou"), "$\ldots \rightarrow \cdots$" ("si-alors) et "$\ldots \leftrightarrow \cdots$" ("ssi") ;*
   (b) *les quantificateurs "$\forall x(\ldots x \cdots)$" ("pour tout x") et "$\exists x(\ldots x \cdots)$" ("il y a au moins un x") ;*
   (c) *le signe d'identité : "$\ldots \doteq \cdots$" ("est identique à") ;*
   (d) *des variables pour des individus : "x_i" pour tout $i \in \mathbb{N}$;*
2. *des signes non-logiques :*
   (a) *des signes pour les relations : "R_i" pour tout $i \in \mathbf{I}$;*
   (b) *des signes pour les fonctions : "f_i" pour tout $i \in \mathbf{J}$;*
   (c) *des constantes pour des individus : "c_i" pour tout $i \in \mathbf{K}$;*
3. *des signes auxiliaires : parenthèses, virgules*

Définition 5. *Les* termes *d'une langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ sont définis par les clauses récursives suivantes :*

1. *Toute variable "x_i" ($i \in \mathbb{N}$) est un terme.*
2. *Toute constante "c_i" ($i \in \mathbb{N}$) est un terme.*
3. *Si "t_1", "t_2", …, "$t_{\mu(j)}$" sont des termes ($j \in \mathbf{J}$), alors "$f_j(t_1, t_2, \ldots, t_{\mu(j)})$" est un terme.*

Définition 6. *ϕ est une* formule atomique *de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu\rangle$ si et seulement si un des suivants est le cas :*

1. *ϕ est de la forme "$t_1 \doteq t_2$" pour deux termes "t_1" et "t_2" ;*
2. *ϕ est de la forme "$R_i(t_1, t_2, \ldots, t_{\lambda(i)})$" pour des termes "$t_1$", "$t_2$", …, "$t_{\lambda(i)}$" et $i \in \mathbf{I}$.*

Définition 7. *ϕ est une* formule *de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu\rangle$ si et seulement si un des suivants est le cas :*

1. *ϕ est une formule atomique ;*
2. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\neg\psi)\urcorner$ pour une formule ψ ;*
3. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\psi \wedge \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \vee \chi)\urcorner$,$\ulcorner(\psi \rightarrow \chi)\urcorner$ ou $\ulcorner(\psi \leftrightarrow \chi)\urcorner$, pour des formules ψ et χ ;*
4. *ϕ est de la forme $\ulcorner\forall x_i(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_i(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable "x_i", $i \in \mathbb{N}$.*

Définition 8. *Si ϕ est une formule et "x_i" une variable, nous disons que "x_i"* a une occurrence libre dans *ϕ si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

1. *ϕ est une formule atomique et contient "x_i" ;*
2. *ϕ a la forme $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et "x_i" a une occurrence libre dans ψ ;*
3. *ϕ a la forme $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ et "x_i" a une occurrence libre ou bien dans ψ ou bien dans χ ;*
4. *ϕ a la forme $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$, $i \neq j$ et "x_i" a une occurrence libre dans ψ.*

Définition 9. *Une* phrase *est une formule qui ne contient aucune occurrence libre d'une variable.*

Définition 10. *Si "s" et "t" sont des termes et "x_i" une variable, nous définissons un nouveau terme, que nous appelons* 'la substitution de "x_i" par "t" dans "s" ' *ou " "$s(x_i/t)$" ", d'une manière récursive comme suit :*

1. *Si "s" est la même variable que "x_i", alors "$s(x_i/t)$" est "t".*
2. *Si "s" est une variable autre que "x_i", alors "$s(x_i/t)$" est "s".*
3. *Si "s" est une constante, alors "$s(x_i/t)$" est "s".*
4. *Si "s" est un terme pour une valeurs de fonction "$f_j(t_1, \ldots, t_{\mu(j)})$" pour des termes "$t_1$", …, "$t_{\mu(j)}$", alors "$s(x_i/t)$" est "$f_j(t_1(x_i/t), \ldots, t_{\mu(j)}(x_i/t))$".*

Définition 11. *Si ϕ est une formule, "t" un terme et "x_i" une variable, nous définissons une nouvelle formule, que nous appelons* 'le résultat de la substitution de "x_i" pour "t" dans ϕ' *ou "$\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$", d'une manière récursive comme suit :*

1. *Si ϕ est "$t_1 \doteq t_2$" pour deux termes "t_1" et "t_2", alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est "$t_1(x_i/t) \doteq t_2(x_i/t)$".*
2. *Si ϕ est "$R_i(t_1, \ldots t_{\lambda(i)})$" pour un signe de relation "R_i" et des termes "t_1", … "$t_{\lambda(i)}$", alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est "$R_i(t_1(x_i/t), \ldots t_{\lambda(i)}(x_i/t))$".*
3. *Si ϕ est $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ pour une formule ψ, alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est $\ulcorner\neg\psi(x_i/t)\urcorner$.*
4. *Si ϕ est $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ pour des formules ψ et χ, alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est $\ulcorner\psi(x_i/t) \wedge \chi(x_i/t)\urcorner$, $\ulcorner\psi(x_i/t) \vee \chi(x_i/t)\urcorner$, $\ulcorner\psi(x_i/t) \rightarrow \chi(x_i/t)\urcorner$ ou $\ulcorner\psi(x_i/t) \leftrightarrow \chi(x_i/t)\urcorner$ respectivement.*
5. *Si ϕ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable "x_j", alors*

$$\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner := \begin{cases} \ulcorner\forall x_j \psi(x_i/t)\urcorner & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases} \qquad \ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner := \begin{cases} \ulcorner\exists x_j \psi(x_i/t)\urcorner & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases}$$

Définition 12. *Soit ϕ une formule, "t" un terme et "x_i" une variable. Nous disons que "t"* est libre pour "x_i" dans *ϕ si un des suivants est le cas :*

1. *ϕ est une formule atomique ;*
2. *ϕ est $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et "t" est libre pour "x_i" dans ψ ;*
3. *ϕ est $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ pour des formules ψ et χ et "t" est libre pour "x_i" dans ψ et dans χ ;*
4. *ϕ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$ et ou bien "x_i" n'est pas libre dans ψ ou bien "x_j" n'a pas d'occurrence dans "t" et "t" est libre pour "x_i" dans ψ.*

Sémantique

Les tables de vérité des connecteurs propositionnels

ϕ	$\ulcorner \neg\phi \urcorner$
V	F
F	V

ϕ	ψ	$\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ϕ	ψ	$\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ϕ	ψ	$\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La sémantique de la logique propositionnelle

Définition 13. *Une* interprétation propositionnelle atomique I^* *est une fonction qui assigne à toute proposition atomique "p_i", $i \in \mathbb{N}$, une des valeurs de vérité* $\mathbf{v}$ *ou* $\mathbf{f}$ *:* $I^* : \{ \text{“}p_i\text{”} \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$.

Définition 14. *Donné une interprétation propositionnelle atomique I^*, nous définissons une* interprétation propositionnelle $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$ *par les clauses récursives suivantes :*

I1 *Si ϕ est une proposition atomique,* $I(\phi) := I^*(\text{“}p\text{”})$

I2 $I(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I4 $I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I5 $I(\phi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$

Définition 15. *Une formule ϕ est une* tautologie *si $I(\phi) = \mathbf{v}$ pour toute interprétation propositionnelle I.*

La sémantique de la logique des prédicats

Définition 16. *Soit $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ une langue de la logique des prédicats. Une* structure $\mathcal{A}$ *pour $\mathcal{L}^+$ consiste en :*

1. *un ensemble non-vide $|\mathcal{A}|$, appelé* 'l'univers de discours' *ou le* 'domaine' *de $\mathcal{A}$;*
2. *une* interprétation *de toutes les signes de relations, qui attribue à tout $i \in \mathbf{I}$ une relation $R_i^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\lambda(i)$ places argumentales, c'est-à-dire un sous-ensemble $R_i^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$.*
3. *une* interprétation *de toutes les signes de fonctions, qui attribue à tout $j \in \mathbf{J}$ une fonction $f_j^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\mu(j)$ places argumentales, c'est-à-dire une fonction $f_j^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{\mu(j)} \rightarrow |\mathcal{A}|$.*

4. une interprétation *de toutes les constantes, qui attribue à tout* $k \in \mathbf{K}$ *un élément fixe,* $c_k^{\mathcal{A}}$*, de* $|\mathcal{A}|$.

Définition 17. *Soit* $\mathcal{L}^+$ *une langue de la logique des prédicats et* $\mathcal{A}$ *une structure pour* $\mathcal{L}^+$*. Une* assignation de valeurs *pour* $\mathcal{L}^+$ *est une fonction* h *qui assigne à toute variable* x_i *(*$i \in \mathbb{N}$*) exactement un élément de l'univers de discours :* $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$.

Définition 18. *Soit* $\mathcal{L}^+$ *une langue de la logique des prédicats,* $\mathcal{A}$ *une structure pour* $\mathcal{L}^+$ *et* $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ *une assignation de valeurs. La* désignation $\bar{h}(t)$ *d'un terme "*t*" de* $\mathcal{L}^+$ *sous cette assignation de valeurs est définie comme suit :*

1. *si "*t*" est une variable,* $\bar{h}(t)$ *est* $h(t)$ *;*
2. *si "*t*" est une constante "*c_k*",* $\bar{h}(t)$ *est* $c_k^{\mathcal{A}}$ *;*
3. *si "*t*" est un terme de la forme "*$f_j(t_1, \ldots t_{\mu(j)})$*", alors* $\bar{h}(t)$ *est* $f_j^{\mathcal{A}}(\bar{h}(t_1), \ldots, \bar{h}(t_{\mu(j)}))$.

Définition 19. *Soit* $\mathcal{L}^+$ *une langue de la logique des prédicats,* $\mathcal{A}$ *une structure pour* $\mathcal{L}^+$*,* $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}+) \to |\mathcal{A}|$ *une assignation de valeurs et "*x_i*" une variable de* $\mathcal{L}^+$*. Nous définissons* l'assignation variée à la place "x_i" *– appelée "*$h\binom{x_i}{a}$*" – comme suit :*

$$h\binom{x_i}{a}(x_j) \quad := \quad \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

Définition 20. *Soit* $\mathcal{L}^+$ *une langue de la logique des prédicats,* $\mathcal{A}$ *une structure pour* $\mathcal{L}^+$ *et* $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ *une assignation de valeurs. Nous disons qu'une formule* ϕ *de* $\mathcal{L}^+$ *est* vraie sous l'assignation de valeurs h *ou que l'assignation de valeurs* h satisfait *la formule* ϕ *(abrégé : "*$\mathcal{A} \models_h \phi$*") si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

S1	ϕ *a la même forme que "*$t_1 \doteq t_2$*"*	*et*	$\bar{h}(t_1) = \bar{h}(t_2)$
S2	ϕ *a la même forme que "*$R_i(t_1, \ldots, t_{\lambda(i)})$*"*	*et*	$R_i^{\mathcal{A}}(\bar{h}(t_1), \ldots, \bar{h}(t_{\lambda(i)}))$
S3	ϕ *est de la forme* $\ulcorner \neg\psi \urcorner$	*et*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$
S4	ϕ *est de la forme* $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *et* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S5	ϕ *est de la forme* $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *ou bien* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S6	ϕ *est de la forme* $\ulcorner \psi \to \chi \urcorner$	*et*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$ *ou bien* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S7	ϕ *est de la forme* $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *si et seulement si* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S8	ϕ *est de la forme* $\ulcorner \forall x_i(\psi) \urcorner$	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour tous les* $a \in |\mathcal{A}|$
S9	ϕ *est de la forme* $\ulcorner \exists x_i(\psi) \urcorner$	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour au moins un* $a \in |\mathcal{A}|$

Définition 21. *Soit* $\mathcal{L}^+$ *une langue de la logique des prédicats et* $\mathcal{A}$ *une structure pour* $\mathcal{L}^+$*. Nous disons qu'une formule* ϕ *de* $\mathcal{L}^+$ *est* vraie dans la structure $\mathcal{A}$ *si et seulement si* ϕ *est vraie sous toutes les assignations de valeurs pour* $\mathcal{L}^+$ *:*

$$\mathcal{A} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}| \; : \quad \mathcal{A} \models_h \phi$$

Si ϕ *est vraie dans une structure* $\mathcal{A}$*, nous appelons* $\mathcal{A}$ *un '*modèle*' de* ϕ*.*

Définition 22. *Soit* $\mathcal{L}^+$ *une langue de la logique des prédicats. Nous disons qu'une formule* ϕ *de* $\mathcal{L}^+$ *est* valide *ou qu'elle est une* vérité logique *(de la logique des prédicats) si et seulement si* ϕ *est vraie dans toutes les structures pour* $\mathcal{L}^+$ *:*

$$\models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } \mathcal{A} \; : \quad \mathcal{A} \models \phi$$

Nous appelons une formule ϕ *une* conséquence sémantique *d'un ensemble de formules si et seulement si* ϕ *est vraie dans toutes les structures où toutes ces formules sont vraies :*

$$\Sigma \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } \mathcal{A} : \textit{si } \mathcal{A} \models \psi \textit{ pour toutes les formules } \psi \in \Sigma\textit{, alors } \mathcal{A} \models \phi$$

Les calculs hilbertiens

La théorie de la preuve

Définition 23. *Un* calcul *est un ensemble de formules propositionnelles, appelées 'théorèmes', déterminé par des axiomes et des règles d'inférence :*

1. *Tout axiome est un théorème.*
2. *Une formule propositionnelle qu'on obtient en appliquant une règle d'inférence à des théorèmes est un théorème.*
3. *Rien d'autre n'est un théorème.*

Définition 24. *Une* preuve*, dans un calcul* HC *et à partir d'une théorie* Th*, est une séquence finie de propositions* $\langle \phi_1, \ldots \phi_n \rangle$ *telle qu'on a, pour tout* i*,* $1 \leq i \leq n$*,* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \cup \{\phi_1, \ldots, \phi_{i-1}\} \ \vdash \phi_i$*.*

Définition 25. *Si* HC *est un calcul,* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle, nous définissons* $\ulcorner \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi \urcorner$ *(*$n \in \mathbb{N}$*) pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par induction sur* n *:*

1. *Si* ϕ *est un axiome de* HC*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
2. *Si* ϕ *est un membre de* Th*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
3. *Si* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ *et* $m_i < n$ *pour toutes les prémisses* ψ_i *d'une règle d'inférence de* HC*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour la conclusion* ϕ *de cette règle d'inférence.*

Un calcul hilbertien pour la logique propositionnelle

Définition 26. *Le calcul* HC *est déterminé par toutes les formules de* $\mathcal{L}$ *qui ont la forme d'un des axiomes suivantes :*

$\mathbf{H_1}$	$\ulcorner \phi \rightarrow \phi \urcorner$	*réflexivité*
$\mathbf{H_2}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)) \urcorner$	*transitivité*
$\mathbf{H_3}$	$\ulcorner ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \urcorner$	*conditionaliser l'antécédent*
$\mathbf{H_4}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \urcorner$	*augmenter l'antécédent*
$\mathbf{H_5}$	$\ulcorner \phi \rightarrow (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire "$\vee$" à droite*
$\mathbf{H_6}$	$\ulcorner \psi \rightarrow (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire "$\vee$" à gauche*
$\mathbf{H_7}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi))) \urcorner$	*alternative*
$\mathbf{H_8}$	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi \urcorner$	*élimination "$\wedge$" à droite*
$\mathbf{H_9}$	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi \urcorner$	*élimination "$\wedge$" à gauche*
$\mathbf{H_{10}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \chi))) \urcorner$	*composition*
$\mathbf{H_{11}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi) \urcorner$	*conversion*
$\mathbf{H_{12}}$	$\ulcorner \phi \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \psi) \urcorner$	*ex falso quodlibet*
$\mathbf{H_{13}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg\phi)) \rightarrow \neg\phi \urcorner$	*reductio ad absurdum*
$\mathbf{H_{14}}$	$\ulcorner ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner$	*introduction "$\leftrightarrow$"*
$\mathbf{H_{15}}$	$\ulcorner (\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \urcorner$	*élimination "$\leftrightarrow$"*
$\mathbf{H_{16}}$	$\ulcorner \phi \vee \neg\phi \urcorner$	*tautologie*

La seule règle d'inférence de HC *est modus ponens* MP *:* $\dfrac{\phi, \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner}{\psi}$.

Un calcul hilbertien pour la logique des prédicats

Définition 27. *Les axiomes du calcul* HC^+ *consistent en toutes les formules de* $\mathcal{L}^+$ *suivantes :*

TP *toutes les* tautologies propositionnelles *;*

ID *les formules qui ont la forme d'un des* axiomes d'identité *suivants (pour des variables "x", "y", "z", , "w", "x_1", "x_2", …, "$x_{\lambda(i)}$", "y_1", "y_2", …, "$y_{\lambda(i)}$", "z_1", "z_2", …, "$z_{\mu(j)}$", "w_1", "w_2", …, "$w_{\mu(j)}$" et tous les* $i \in \mathbf{I}$*,* $j \in \mathbf{J}$*) :*

ID₁	$x \doteq x$		*réflexivité*
ID₂	$y \doteq z \rightarrow (y \doteq w \rightarrow z \doteq w)$		*confluence*
ID₃	$(x_1 \doteq y_1 \wedge \ldots \wedge x_{\lambda(i)} \doteq y_{\lambda(i)}) \rightarrow (R_i(x_1, \ldots, x_{\lambda(i)}) \rightarrow R_i(y_1, \ldots, y_{\lambda(i)}))$		*indiscernabilité*
ID₄	$(z_1 \doteq w_1 \wedge \ldots \wedge z_{\mu(j)} \doteq w_{\mu(j)}) \rightarrow f_j(z_1, \ldots, z_{\lambda(i)}) \doteq f_j(w_1, \ldots, w_{\mu(j)})$		*fonctionalité*

QU *les formules ϕ qui ont la forme de la proposition suivante, où ψ est une formule et "t" est un terme qui est libre pour "x" dans ψ :*

Qu $\forall x(\psi) \rightarrow \psi(x/t)$ *instanciation*

HC^+ *a deux règles d'inférences :*

MP *la première règle d'inférences de* HC^+ *est modus ponens* MP *:*

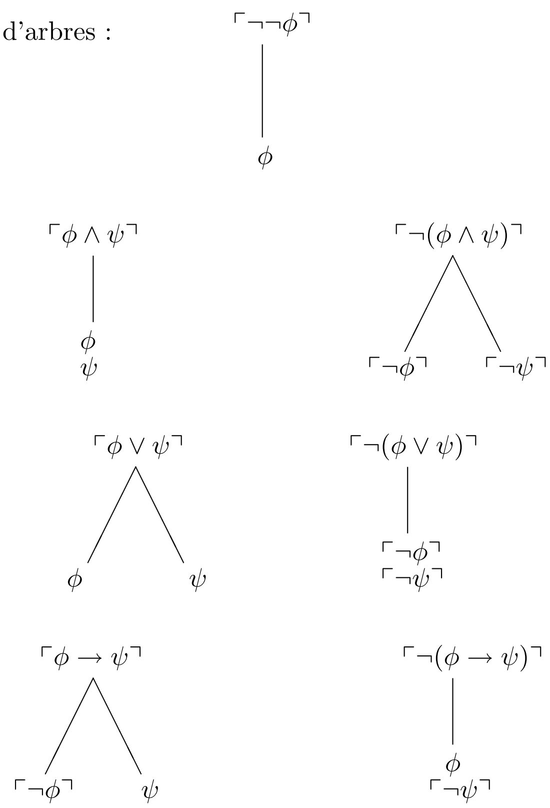
$$\frac{\phi, \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner}{\psi}$$

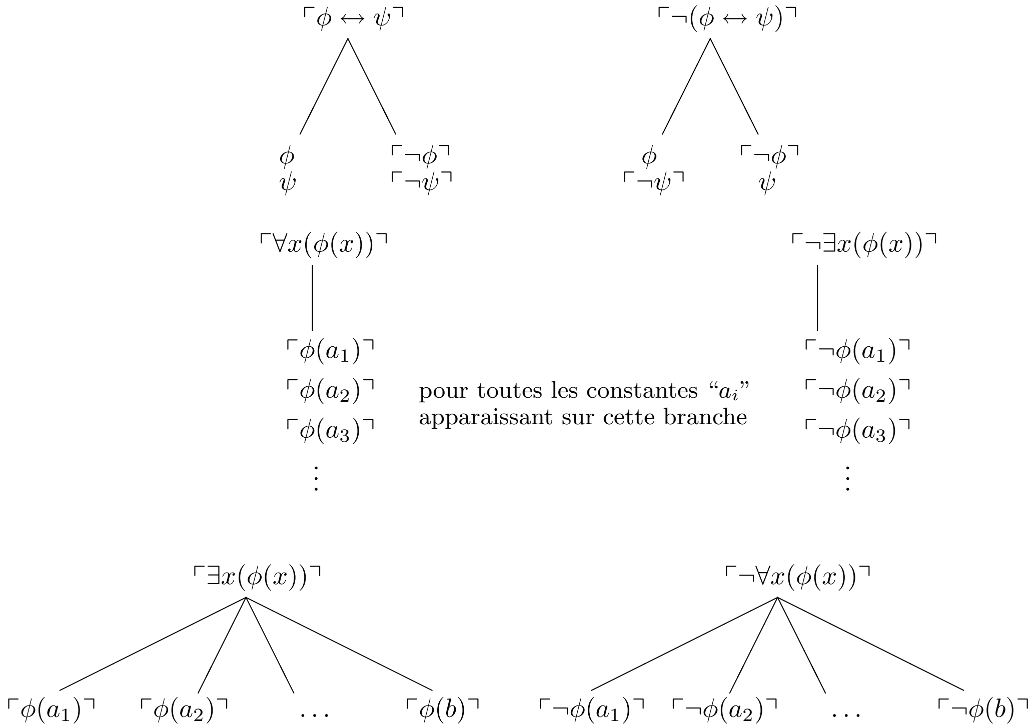
$\forall$ *la deuxième règle d'inférences de* HC^+ *est appelée "généralisation" ou "$\forall$" :*

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \forall x(\psi)} \quad \textit{si "x" n'a pas d'occurrence libre dans } \phi$$

La méthode des arbres

Les règles de construction d'arbres :





pour toutes les constantes “a_i” de la branche et une nouvelle constante “b”

La déduction naturelle

La règle des suppositions

n	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition

Modus ponens (modus ponendo ponens)

m	$\vdash$ ⌜$\phi \rightarrow \psi$⌝	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (MP)

Modus tollens (modus tollendo tollens)

m	$\vdash$ ⌜$\phi \rightarrow \psi$⌝	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash$ ⌜$\neg\psi$⌝	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash$ ⌜$\neg\phi$⌝	de (m) et (n) par (MT)

Preuve conditionnelle

m	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
o		$\vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner$	de (m) et (n) par (PC)

L'introduction et l'élimination de la double négation

m	$\vdash \ulcorner \neg\neg\phi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	de (m) par (DN)

m	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \neg\neg\phi \urcorner$	de (m) par (DN)

La réduction à l'absurde (reductio ad absurdum)

m	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
o	ϕ	$\vdash^* \ \ulcorner \neg\psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
p		$\vdash \ulcorner \neg\phi \urcorner$	de (m), (n) et (o) par (RAA)

L'introduction de la conjonction

m	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	de (m) et (n) par $(\wedge\mathbf{I})$

L'élimination de la conjonction

m	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	de (m) par $(\wedge\mathbf{E})$

m	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \psi$	de (m) par $(\wedge\mathbf{E})$

L'introduction de la disjonction

m		$\vdash \phi$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	de (m) par $(\vee\mathbf{I})$

m		$\vdash \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	de (m) par $(\vee\mathbf{I})$

L'élimination de la disjonction

m		$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^{*}\ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
o	ϕ	$\vdash^{*}\ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
p	ψ	$\vdash^{*}\ \psi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
q	ψ	$\vdash^{*}\ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
r		$\vdash \chi$	de (m), (n), (o), (p) et (r) par $(\vee\mathbf{E})$

L'introduction de l'équivalence matérielle

m		$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
o		$\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$	de (m) et (n) par $(\leftrightarrow \mathbf{I})$

L'élimination de l'équivalence matérielle

m		$\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	de (m) par $(\leftrightarrow \mathbf{E})$

m		$\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$	de (m) par $(\leftrightarrow \mathbf{E})$

L'élimination du quantificateur universel

Condition : "t" doit être un terme qui est libre pour "x" dans ϕ.

m		$\vdash \ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	de (m) avec (SU)

L'introduction du quantificateur existentiel

Condition : "t" doit être un terme qui est libre pour "x" dans ϕ.

m	$\vdash \ulcorner \phi(x/t) \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \exists x(\phi) \urcorner$	de (m) avec (GE)

L'introduction du quantificateur universel

Condition : "a" n'a pas d'occurrence dans une des prémisses dont dépend la preuve de ϕ.

m	$\vdash \ulcorner \phi(a) \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \forall x(\phi(a/x)) \urcorner$	de (m) avec (GU)

L'élimination du quantificateur existentiel

Condition : "a" n'a pas d'occurrence dans ψ ou dans une supposition dont dépend la preuve de ψ à partir de $\ulcorner \phi(a) \urcorner$.

m	$\vdash \ulcorner \exists x(\phi(a/x)) \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\ulcorner \phi(a) \urcorner \quad \vdash^* \ \ulcorner \phi(a) \urcorner$	supposition
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\ulcorner \phi(a) \urcorner \quad \vdash^* \ \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	
p	$\vdash \psi$	de (m), (n) et (o) avec (SE)