La logique propositionnelle

Cours d'introduction à la logique et la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Résumé de la première partie du cours, le 9 décembre 2003

Points à retenir

La domaine de la logique

1. Une inférence formellement valide est valide en vertu de sa forme : elle est valide si et seulement si toute inférence ayant la même forme (logique) l'est aussi.
2. Une inférence est valide s'il n'est pas et seulement s'il n'est pas logiquement possible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse. Il faut distinguer la validité d'une inférence de la vérité ou fausseté des propositions qu'elle contient : une inférence avec des prémisses vraies peut être non valide, une inférence avec des prémisses fausses peut être valide.
3. Une langue formelle, comme celle de la logique propositionnelle, est artificiellement construite et manque de dimension pragmatique. Elle sert à la formalisation des arguments.

Un peu d'histoire de la logique

1. Gottlob Frege (*Idéographie*, 1879) a été le premier à axiomatiser la logique propositionnelle et la logique des prédicats.
2. Cette révolution en logique a rendu possible des progrès importants en mathématiques (axiomatisation de l'arithmétique et de la géométrie) et leurs a rajouté deux nouvelles branches, les métamathématiques (étude des calculs formels, Hilbert) et la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo).
3. La logique propositionnelle a pris sa forme contemporaine dans les *Principia Mathematica* (1910), de Bertrand Russell et Alfred North Whitehead.
4. Bertrand Russell a découvert, en 1902, une contradiction dans l'axiomatisation de l'arithmétique par Frege ('paradoxe de Russell').
5. Le résultat le plus important en métamathématique était la découverte, par Gödel en 1931, de l'incomplétude de l'arithmétique, le plus important résultat en sémantique la définition, par Alfred Tarski en 1936, d'une définition non-contradictoire de "vérité".
6. Les trois grands courants dans la philosophie des mathématiques dans la première moitié du 20ème siècle étaient le logicisme de Frege (les mathématiques comme partie de la logique), le formalisme de Hilbert (les mathématiques comme manipulations des symboles) et l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting (constructivisme, rejet du tiers exclu).

Un peu de philosophie du langage

1. Il faut distinguer l'utilisation et la mention des mots ; dans le deuxième cas, il faut mettre des guillemets. Les mots utilisées constituent le langage objet, les noms des mots mentionnées le métalangage.
2. La syntaxe étudie la forme des expressions et détermine leur grammaticalité ; la sémantique étudie leurs significations et leurs conditions de vérité et la pragmatique systématise leur usage.
3. Selon le principe de compositionalité, la signification d'une expression complexe est une fonction de la signification des expressions simples qu'elle contient et de la manière dont celles-là sont composées pour former l'expression complexe.
4. Nous pouvons introduire des abréviations pour des noms de propositions ; aux guillemets pour les propositions correspondent les demi-crochets de Quine pour les noms de propositions : au lieu de "$\phi \wedge \psi$", nous écrivons "$\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$".

La logique propositionnelle

1. La logique propositionnelle étudie les connecteurs propositionnels qui relient des propositions ; la logique des prédicats étudie en plus la quantification, les relations et les fonctions.
2. La syntaxe détermine quelles sont les formules bien formées d'une langue ; la sémantique donne des interprétations des signes ; elle leur associe une signification.
3. Selon le *principe de vérifonctionnalité*, la valeur de vérité d'une proposition complexe ne dépend que des valeurs de vérité des propositions qui la constituent et des connecteurs qui les relient.
4. Une inférence est valide si et seulement si sa conclusion est une conséquence sémantique de (la conjonction de) ses prémisses.
5. Une inférence est valide si et seulement si l'implication matérielle correspondante (ayant la conjonction des prémisses comme antécédent et la conclusion comme conséquent) est une tautologie.
6. Toute inférence ayant une tautologie comme conclusion est valide.
7. Toute inférence ayant une contradiction comme prémisse est valide.
8. Il y a 16 connecteurs binaires possibles dans la logique propositionnelle. Nous pouvons les définir à partir de "$\neg$" et "$\wedge''$, "$\neg$" et "$\vee$", "$\neg$" et "$\rightarrow$", "$|$" ou "$\downarrow$".
9. Les lois de De Morgan :
   $$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner \iff \ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$$
   $$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner \iff \ulcorner\neg\phi \wedge \neg\psi\urcorner$$
10. Les lois de distributivité :
   $$\ulcorner\phi \vee (\psi \wedge \chi)\urcorner \iff \ulcorner(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)\urcorner$$
   $$\ulcorner\phi \wedge (\psi \vee \chi)\urcorner \iff \ulcorner(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)\urcorner$$

La méthode des tables de vérité

1. Les connecteurs propositionnels sont définis, sémantiquement, par leurs tables de vérité :

ϕ	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$
V	F
F	V

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2. Une table de vérité pour une proposition spécifie dans chaque ligne une interprétation (attribution de valeurs de vérité aux constituantes simples) ou une possibilité logique. Elle montre comment la valeur de vérité d'une proposition complexe dépend des valeurs de vérité de ses constituantes simples.
3. Si la colonne qui correspond au connecteur principale ne contient que des "V", on parle d'une tautologie.

4. Si à toute ligne qui a "V" pour une première proposition correspond une ligne qui a "V" pour une seconde proposition, la seconde est une conséquence sémantique de la première.
5. Si deux propositions ont la même table de vérité (les mêmes colonnes pour leurs connecteurs principaux), on parle d'une équivalence sémantique.

La méthode syntaxique des calculs hilbertiens

1. La syntaxe ne fait abstraction non seulement de la signification des propositions, mais aussi de leurs valeurs de vérité.
2. Un calcul est un ensemble de formules propositionnelles déterminé par un ensemble de formules propositionnelles qui sont appelées les 'axiomes' et des règles d'inférence. Un élément de cet ensemble est appelé un 'théorème'.
3. Un calcul définit une relation de déductibilité $\vdash$.
4. Il faut distinguer les preuves dans le calcul (qui consistent en des déduction de théorèmes à partir des axiomes à l'aide des règle d'inférence) des preuves sur le calcul (qui en déterminent des propriétés méta-logiques et se servent de toutes les méthodes acceptées en mathématiques).
5. La logique propositionnelle peut être axiomatisée de différentes manières.

La sémantique de la logique propositionnelle

1. Une interprétation propositionnelle associe à toute formule propositionnelle une et une seule valeur de vérité. Elle correspond à une possibilité logique et à une ligne dans une table de vérité.
2. Une formule propositionnelle est une tautologie si et seulement si elle est vraie sous toutes les interprétations de ses constituantes simples. Elle est une contradiction si et seulement si elle n'est vraie sous aucune interprétation.
3. Un ensemble de propositions est consistant s'il y a et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies toutes les propositions de cet ensemble. Autrement, il est inconsistante.
4. Une formule propositionnelle est une conséquence (sémantique) d'un ensemble de propositions (écrit : "$\mathsf{Th} \models \phi$") si et seulement si toute interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles dans l'ensemble la rend vraie aussi.
5. Un calcul ou une méthode de preuve syntaxique est correct si tout théorème est une tautologie.
6. Un calcul ou une méthode de preuve syntaxique est complet si toute tautologie est un théorème.
7. Le calcul hilbertien HC, la méthode des arbres et le système de déduction naturelle sont tous corrects et complets.

La méthode des arbres

1. Prouver une proposition par la méthode des arbres revient à montrer que toutes les branches de l'arbre pour sa négation se ferment.
2. Comme teste de consistance, la méthode des arbres nous permet d'établir si ou non une proposition ou un ensemble de propositions est consistant et, dans le cas d'une réponse affirmative, de trouver une interprétation pertinente.
3. La méthode des arbres nous permet d'établir si ou non une proposition donnée est une tautologie : elle l'est si et seulement si l'arbre pour sa négation ne contient que des branches fermées.
4. La méthode des arbres nous permet également de tester un argument pour sa validité, en vérifiant si ou non l'implication correspondante est une tautologie.

La déduction naturelle

1. La caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est l'usage des suppositions. La règle des suppositions nous permet d'introduire n'importe quelle supposition à n'importe quelle stade de la preuve ; les règles PC, RAA et $\vee$**E** nous permettent de nous en décharger.
2. Les règles de la déduction naturelle sont des règles d'introduction et d'élimination pour les connecteurs propositionnels et peuvent être conçues comme donnant leurs significations.
3. La méthode de la déduction naturelle nous permet de prouver des théorèmes ("$\vdash p$") et des séquents ("$p \vdash q$") par les règles suivantes :
   (a) supposition : je peux supposer ce que je veux (si j'en tiens compte ensuite)
   (b) MP : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et aussi "p", je peux écrire "q".
   (c) MT : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
   (d) PC : si j'ai supposé "p" et montré ensuite"q", je peux écrire "$p \rightarrow q$".
   (e) DN : si j'ai déjà "$\neg\neg p$", je peux écrire "p" ; si j'ai déjà "p", je peux écrire "$\neg\neg p$".
   (f) RAA : si j'ai supposé "p" et montré qu'il s'ensuit "q" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
   (g) $\wedge$**I** : si j'ai déjà "p" et "q", je peux écrire "$p \wedge q$".
   (h) $\wedge$**E** : si j'ai déjà "$p \wedge q$", je peux écrire "p" et aussi écrire "q".
   (i) $\vee$**I** : si j'ai déjà "p", je peux écrire "$p \vee q$" ; si j'ai déjà "q", je peux écrire "$p \vee q$".
   (j) $\vee$**E** : si j'ai montré "$p \vee q$" et que "r" s'ensuit de "p" et que "r" s'ensuit de "q", je peux écrire "r".
   (k) $\leftrightarrow$ **I** : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow p$", je peux écrire "$p \leftrightarrow q$".
   (l) $\leftrightarrow$ **E** : si j'ai déjà "$p \leftrightarrow q$", je peux écrire "$p \rightarrow q$" et aussi écrire "$q \rightarrow p$".
4. Pour avoir prouvé un théorème ou un séquent, il faut avoir déchargé toute supposition.
5. Pour établir une conclusion implicative, il convient d'utiliser PC.
6. Pour établir une conclusion négative, il convient d'utiliser RAA.
7. Le théorème de déduction nous assure de la validité de la règle de preuve conditionnelle.
8. La méthode de la déduction naturelle nous permet d'utiliser des règles dérivées.

Matériel à disposition

La syntaxe de la logique propositionnelle

Définition 1. *L'*alphabet *du langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle classique consiste en les signes suivants :*

1. *des propositions atomiques "p_0", "p_1", "p_2" ...(une infinité dénombrable)*
2. *les connecteurs "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$" et "$\leftrightarrow$"*
3. *des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules*

Définition 2. *Une* formule propositionnelle *est définie comme suit :*

1. *Toute proposition atomique "p_i" ($i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*
2. *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*
3. *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Définition 3. *Une* théorie *est un ensemble (fini ou infini) de formules propositionnelles.*

La théorie de la preuve pour la logique propositionnelle

Définition 4. *Un* calcul *est un ensemble de formules propositionnelles, appelées 'théorèmes', déterminé par des axiomes et des règles d'inférence :*

1. *Tout axiome est un théorème.*
2. *Une formule propositionnelle qu'on obtient en appliquant une règle d'inférence à des théorèmes est un théorème.*
3. *Rien d'autre n'est un théorème.*

Définition 5. *Une* preuve*, dans un calcul* HC *et à partir d'une théorie* Th*, est une séquence finie de propositions* $\langle \phi_1, \dots \phi_n \rangle$ *telle qu'on a, pour tout* i*,* $1 \leq i \leq n$*,* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \cup \{\phi_1, \dots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$*.*

Définition 6. *Si* HC *est un calcul,* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle, nous définissons* $\ulcorner \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi \urcorner$ *(*$n \in \mathbb{N}$*) pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par induction sur* n *:*

1. *Si* ϕ *est un axiome de* HC*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
2. *Si* ϕ *est un membre de* Th*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
3. *Si* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ *et* $m_i < n$ *pour toutes les prémisses* ψ_i *d'une règle d'inférence de* HC*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour la conclusion* ϕ *de cette règle d'inférence.*

Un calcul hilbertien pour la logique propositionnelle

Définition 7. *Le calcul* HC *est déterminé par toutes les formules de* $\mathcal{L}$ *qui ont la forme d'un des axiomes suivantes :*

$\mathbf{H_1}$	$\ulcorner \phi \rightarrow \phi \urcorner$	*réflexivité*
$\mathbf{H_2}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)) \urcorner$	*transitivité*
$\mathbf{H_3}$	$\ulcorner ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \urcorner$	*conditionaliser l'antécédent*
$\mathbf{H_4}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \urcorner$	*augmenter l'antécédent*
$\mathbf{H_5}$	$\ulcorner \phi \rightarrow (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire "$\vee$" à droite*
$\mathbf{H_6}$	$\ulcorner \psi \rightarrow (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire "$\vee$" à gauche*
$\mathbf{H_7}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \chi)) \urcorner$	*alternative*
$\mathbf{H_8}$	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \rightarrow \phi \urcorner$	*élimination "$\wedge$" à droite*
$\mathbf{H_9}$	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \rightarrow \psi \urcorner$	*élimination "$\wedge$" à gauche*
$\mathbf{H_{10}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\psi \wedge \chi))) \urcorner$	*composition*
$\mathbf{H_{11}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \phi) \urcorner$	*conversion*
$\mathbf{H_{12}}$	$\ulcorner \phi \rightarrow (\neg \phi \rightarrow \psi) \urcorner$	*ex falso quodlibet*
$\mathbf{H_{13}}$	$\ulcorner (\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg \phi)) \rightarrow \neg \phi \urcorner$	*reductio ad absurdum*
$\mathbf{H_{14}}$	$\ulcorner ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow (\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner$	*introduction "$\leftrightarrow$"*
$\mathbf{H_{15}}$	$\ulcorner (\phi \leftrightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)) \urcorner$	*élimination "$\leftrightarrow$"*
$\mathbf{H_{16}}$	$\ulcorner \phi \vee \neg \phi \urcorner$	*tautologie*

La seule règle d'inférence de HC *est modus ponens* MP *:* $\dfrac{\phi, \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner}{\psi}$.

La sémantique de la logique propositionnelle

Définition 8. *Une* interprétation propositionnelle atomique I^* *est une fonction qui assigne à toute proposition atomique "*p_i*",* $i \in \mathbb{N}$*, une des valeurs de vérité* $\mathbf{v}$ *ou* $\mathbf{f}$ *:* $I^* : \{ \text{“}p_i\text{”} \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$*.*

Définition 9. *Donné une interprétation propositionnelle atomique* I^**, nous définissons une* interprétation propositionnelle $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$ *par les clauses récursives suivantes :*

I1 *Si* ϕ *est une proposition atomique,* $I(\phi) := I^*(\text{“}p\text{”})$

I2 $$I(\neg \phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \end{cases}$$

I3 $$I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \text{ et } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \text{ ou } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$$

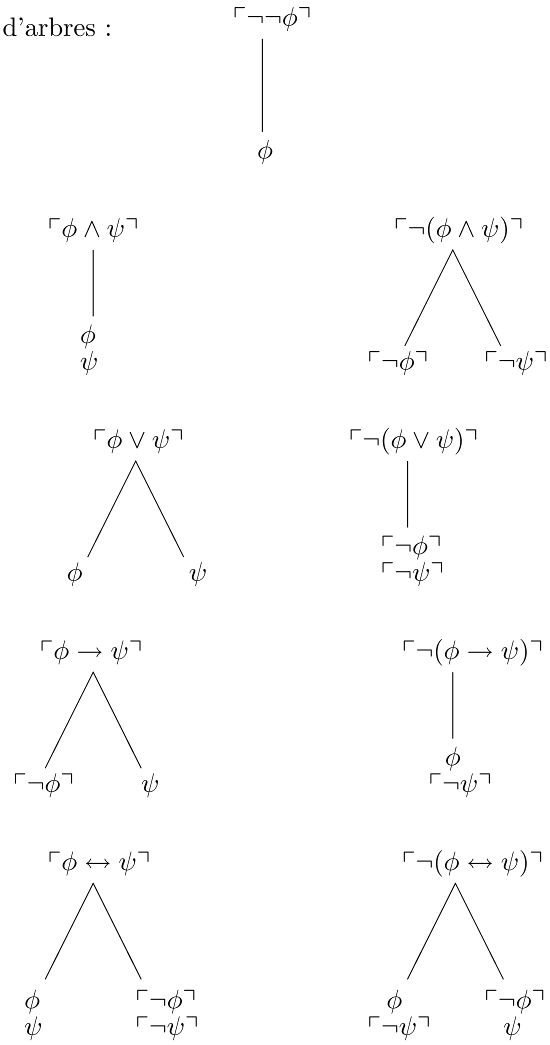
I4 $\quad I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{v} \ ou\ I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{f} \ et\ I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I5 $\quad I(\phi \to \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = \mathbf{f} \ ou\ I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi) = \mathbf{v} \ et\ I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $\quad I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$

La méthode des arbres

Les règles de construction d'arbres :



Les règles de la déduction naturelle

La règle des suppositions

n	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition

Modus ponens (modus ponendo ponens)

m	$\vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (MP)

Modus tollens (modus tollendo tollens)

m		$\vdash \ulcorner\phi \to \psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
o		$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	de (m) et (n) par (MT)

Preuve conditionnelle

m	ϕ	$\vdash^*\ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^*\ \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
o		$\vdash \ulcorner\phi \to \psi\urcorner$	de (m) et (n) par (PC)

L'introduction et l'élimination de la double négation

m		$\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \phi$	de (m) par (DN)

m		$\vdash \phi$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	de (m) par (DN)

La réduction à l'absurde (reductio ad absurdum)

m	ϕ	$\vdash^*\ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^*\ \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
o	ϕ	$\vdash^*\ \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
p		$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	de (m), (n) et (o) par (RAA)

L'introduction de la conjonction

m		$\vdash \phi$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
o		$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	de (m) et (n) par ($\wedge$**I**)

L'élimination de la conjonction

m		$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \phi$	de (m) par ($\wedge$**E**)

m		$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \psi$	de (m) par ($\wedge$**E**)

L'introduction de la disjonction

m		$\vdash \phi$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	de (m) par ($\vee$**I**)

m		$\vdash \psi$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	de (m) par ($\vee$**I**)

L'élimination de la disjonction

m		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
o	ϕ	$\vdash^* \ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
p	ψ	$\vdash^* \ \psi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
q	ψ	$\vdash^* \ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
r		$\vdash \chi$	de (m), (n), (o), (p) et (r) par ($\vee$**E**)

L'introduction de l'équivalence matérielle

m		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
o		$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	de (m) et (n) par ($\leftrightarrow$ **I**)

L'élimination de l'équivalence matérielle

m		$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

m		$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n		$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)