

# La logique des prédicats

Cours d'introduction à la logique et à la philosophie du langage au semestre d'hiver 2003-2004

Résumé de la deuxième moitié du cours, le 30 janvier 2004

## Phrases ouvertes et quantification

1. Nous obtenons des prédicats (ou 'phrases ouvertes') des propositions en effaçant un ou plusieurs termes singuliers.
2. La syllogistique classique distingue quatre types de propositions : **SaP**, **SiP**, **SeP**, **SoP**.
3. Ces quatre types de propositions correspondent à des relations entre les extensions des termes "*S*" et "*P*".
4. Ces relations peuvent être symbolisées à l'aide des diagrammes de Venn ; on peut ainsi vérifier, par exemple, le carré des oppositions.
5. Les inférences valides de la syllogistique sont des inférences directes ou indirectes ; des dernières il y a 19 principales que l'on peut mémoriser à l'aide des noms comme "Barbara", "Ferio", "Cesare" et "Felapton".
6. Déjà les diagrammes de Venn dépassent les limites de la syllogistique.
7. Les défauts principaux de la syllogistique et des diagrammes de Venn sont : (i) elles ne peuvent pas être combinées avec la logique propositionnelle ; (ii) elle ne ne laissent pas de place pour une 'logique des relations'.
8. Les prédicats ou phrases ouvertes ne sont ni vrais ni faux, mais vrais ou faux *de* certains individus ; les individus les satisfont de la même manière comme les arguments satisfont les fonctions.
9. Les variables indiquent des lacunes dans les phrases ouvertes ; les quantificateurs servent à en former des phrases complètes.
10. Les quantificateurs de la logique des prédicats sont de la même catégorie syntaxique que les prédicats de deuxième ordre.

## Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

1. L'alphabet d'une langue pour la logique des prédicats contient des connecteurs, le signe d'identité, des variables, des quantificateurs, des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes individuelles. Les trois dernières catégories composent les signes non-logiques de la langue.
2. Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle ne se trouve pas partout dans la portée d'un quantificateur correspondant.
3. Une structure pour une telle langue consiste d'un univers de discours et d'une interprétation de ses signes non-logiques.
4. Une interprétation d'une constante lui assigne un élément de l'univers de discours ; l'interprétation d'un signe de relation lui assigne une relation dans cet univers ; et l'interprétation d'un signe de fonction lui assigne une fonction de cet univers dans cet univers.
5. Une assignation de valeurs dans une structure assigne à toute variable de la langue un élément de l'univers de discours.
6. La notion clef de la sémantique de la logique des prédicats est celle de la satisfaction d'une phrase ouverte par une assignation de valeurs dans une structure.
7. Une phrase ouverte est satisfiable dans une structure si elle est vraie sous une assignation de valeurs dans cette structure.

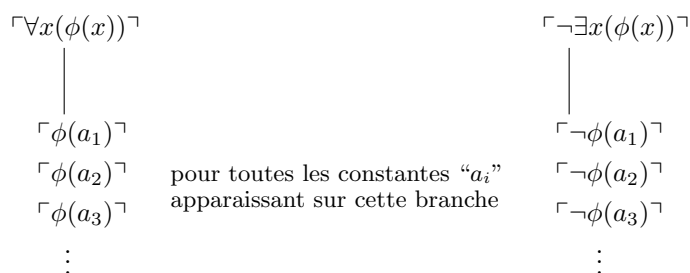
8. Une formule est vraie dans une structure si elle est et seulement si elle est vraie sous toutes les assignations de valeurs dans cette structure. Une telle structure est appelée un ‘modèle’ de la formule.
9. Une formule est valide si elle est et seulement si elle est vraie dans toutes les structures.
10. L’ordre des quantificateur est important : “ $\exists y \forall x Rxy$ ” implique formellement “ $\forall x \exists y Rxy$ ”, mais la converse est fausse.
11. La substitution d’un terme pour une variable dans une formule substitue ce terme à toute occurrence de la variable dans la formule.
12. Pour qu’une telle substitution compte comme instantiation, il faut que le terme soit libre pour la variable dans la formule, c’est-à-dire qu’il ne contient pas de variable qui devient liée par la substitution.
13. Nous pouvons axiomatiser la logique des prédicats par un calcul hilbertien, qui a comme axiomes les tautologies propositions, des schémas des axiomes d’identité et un seul schéma d’axiome quantificationnel,  $\lceil \forall x(\phi) \rightarrow \phi(x/t) \rceil$ , et deux règles d’inférences, MP et la suivante :

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \forall x(\psi)} \quad \text{si “}x\text{” n’a pas d’occurrence libre dans } \phi$$

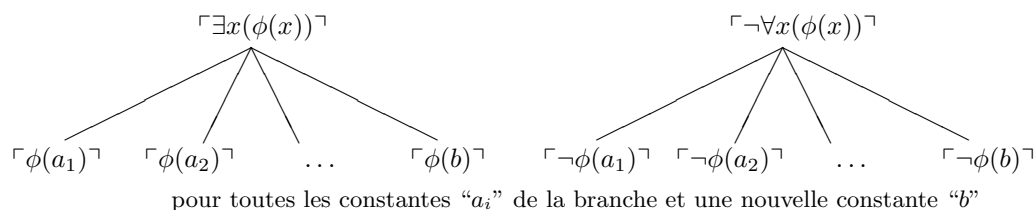
14. Dans une structure ayant un domaine fini, une quantification universelle est équivalente à la conjonction de ses instantiations et une quantification existentielle est équivalente à la disjonction de ses instantiations.

### La méthode des arbres

1. Si une quantification universelle  $\lceil \forall x(\phi(x)) \rceil$  est vraie, alors toutes ses instantiations  $\lceil \phi(a) \rceil$ , pour une constante individuelle “ $a$ ”, sont vraies. Si une quantification existentielle  $\lceil \exists x(\phi(x)) \rceil$  est fausse, alors toutes ses instantiations  $\lceil \phi(a) \rceil$  sont fausses.
2. Si une quantification universelle  $\lceil \forall x(\phi(x)) \rceil$  est fausse, alors au moins une instantiation  $\lceil \phi(a) \rceil$  est fausse. Si une quantification existentielle  $\lceil \exists x(\phi(x)) \rceil$  est vraie, alors au moins une instantiation  $\lceil \phi(a) \rceil$  est vraie.
3. Les règles de construction d’arbres pour le quantificateur universel et la négation d’un quantificateur existentiel sont les suivantes :



4. Les règles de construction d’arbres pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel sont les suivantes :



5. Nous pouvons simplifier les dernières règles pour " $\exists x(\phi(x))$ " et pour " $\neg\forall x(\phi(x))$ " en nous concentrant uniquement sur la branche contenant la constante nouvelle.
6. La méthode des arbres nous permet prouver une proposition *si* cette proposition est valide. Mais nous pouvons pas déduire du fait que nous arrivons pas à la prouver (que l'arbre pour sa négation ne se ferme pas) que la proposition n'est pas valide.

### La déduction naturelle

1. La déduction naturelle pour la logique des prédicats consiste des règles de déduction naturelles pour les connecteurs et de quatre règles d'introduction et d'élimination de quantificateurs.
2. La règle (SU), appelée *spécialisation universelle*, nous permet de passer d'une quantification universelle à une instanciation de la phrase ouverte pour n'importe quel constante.
3. Pour prouver une quantification universelle à partir des prémisses particulières à l'aide de la règle de '*généralisation universelle*' (GU), nous exigerons donc que ces prémisses soient vraies d'un individu arbitraire, un individu qui n'apparaît dans aucune supposition ou prémisses dont dépend la preuve des propositions singulières.
4. Un quantificateur existentiel est introduit par la règle de '*généralisation existentielle*' (GE).
5. La règle d'élimination du quantificateur existentiel (SE) correspond à celle de l'élimination de la disjonction.
6. L'application de la règle de spécialisation existentielle (SE) comprend quatre étapes :
  - (a) la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
  - (b) la supposition du disjoint typique ;
  - (c) une preuve d'une autre proposition sous la supposition du disjoint typique ;
  - (d) l'application de la règle, avec la conclusion que nous pouvons également prouver la proposition prouvée sous la supposition du disjoint typique à partir des suppositions et prémisses nécessaires pour la preuve de la quantification existentielle ;

### Propriétés métalogiques

1. Le calcul hilbertien, la méthode des arbres et la déduction naturelles sont complets et corrects par rapport aux propositions valides dans la logique des prédicats.
2. La logique des prédicats, contrairement à la logique propositionnelle et à la logique des prédicats unaires, n'est pas décidable, mais seulement semi-décidable.