Chapitre 2

Les connecteurs propositionnels

2.1 La formalisation des arguments

Nous avons vu (à la page p. 16) qu'un argument est une inférence s'il est convaincant (s'il l'est) en vertu des significations de certains mots qu'il contient. Et, qu'un argument est formel (est une inférence logique) si ces mots sont des 'mots logiques'.

Les différents systèmes de logiques diffèrent en raison de ce qu'ils considèrent être des 'mots logiques'. La logique standard propositionnelle ne considère que les connecteurs propositionnels (des connecteurs qui relient des phrases entières) comme "... et $\cdots$", "... ou $\cdots$", "il n'est pas le cas que ...", "si ... alors $\cdots$ " et "... ssi $\cdots$" (= "si et seulement si"). La logique standard des prédicats considère en outre les quantificateurs ("pour tous ... $\cdots$", "il y a au moins un ... tel que $\cdots$"), des relations (par ex. "... est identique à $\cdots$") et des fonctions (par ex. "la mère de ..."). La logique des prédicats est appelée ainsi parce qu'elle permet le traitement logique des expressions sub-sententielles (plus petites que des phrases entières), par ex. des termes singuliers (noms) et des prédicats.

Le calcul des propositions (la logique propositionnelle) étudie de quelle manière la vérité (ou la fausseté) d'une phrase complexe est fonction de la vérité (ou la fausseté) des phrases élémentaires qui la composent. Dans des langues naturelles, où la forme grammaticale ne coïncide pas toujours avec la forme logique, cette dépendance des constituantes simples de la phrase complexe n'est pas toujours apparente. C'est pour cela que la logique ne traite pas directement le langage ordinaire, mais travaille à partir d'un langage artificiel et simplifié, déterminé par des définitions explicites. À cet effet, nous avons introduit un langage $\mathcal{L}$, qui sera notre langage de la logique propositionnelle, et dont les symboles primitifs sont les suivants :

A1	des propositions atomiques "p", "q", "r", "s", "t" etc.,
A2	des constantes logiques "$\wedge$" (parfois : "&") ("et"), "$\vee$" ("ou"), "$\neg$" (parfois "$\sim$") ("il n'est pas le cas que"), "$\rightarrow$" (parfois : "$\supset$") ("si ... alors $\cdots$") et "$\leftrightarrow$" (parfois : "$\equiv$") ("... si et seulement si $\cdots$", "... ssi $\cdots$")
A3	des parenthèses "(" et ")".

Nous appelons "$\wedge$" "conjonction", "$\vee$" "disjonction", "$\neg$" "négation", "$\rightarrow$" "implication" et "$\leftrightarrow$" "équivalence".

Nous avons aussi donné une définition récursive de ce qu'est une formule bien formée de $\mathcal{L}$:

B1 Toute proposition atomique est une formule bien formée.
B2 Si "p" et "q" sont des formules bien formées, alors "$(\neg p)$", "$(p \wedge q)$", "$(p \vee q)$", "$(p \rightarrow q)$" et "$(p \leftrightarrow q)$" sont des formules bien formées.
B3 Il n'y a pas d'autres formules bien formées.

On voit que les connecteurs propositionnels binaires s'appliquent à deux phrases pour en faire une troisième, plus complexe. Le seul connecteur unaire que nous étudierons, la négation, ne s'applique qu'à une seule phrase pour en faire une deuxième, plus complexe.

Ces deux définitions du vocabulaire primitif et des règles qui permettent d'en construire des expressions plus complexes, déterminent la *syntaxe* de notre langue $\mathcal{L}$.

En syntaxe, on peut définir ce que l'on appelle le "*connecteur principal*" d'une proposition, c'est-à-dire le connecteur le moins imbriqué dans les parenthèses, celui qui 'vient en premier' mais que l'on 'calcule en dernier'. L'arithmétique nous fournit ici une analogie utile. Dans l'expression "$((2+3)\cdot 4)-5$", le connecteur principal est la soustraction parce que c'est celui que l'on considère en dernier :

$$
\begin{array}{l}
((2+3)\cdot 4)-5 \\
\quad ((5)\cdot 4)-5 \\
\qquad (20)-5 \\
\qquad\qquad\qquad = 15
\end{array}
$$

De même, dans l'expression "$(p \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow s$", le connecteur principal est "$\leftrightarrow$", dans "$\neg(\neg p \wedge \neg q)$" c'est le premier "$\neg$" et dans "$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$" le troisième "$\rightarrow$". Savoir quel connecteur est le connecteur principal d'une proposition dépend essentiellement des parenthèses qui sont utilisées pour l'exprimer. Les parenthèses nous servent à indiquer la portée des opérateurs. Pour vouloir dire par exemple qu'une négation nie l'ensemble d'une conjonction, on la place devant cette conjonction entourée de parenthèses : "$\neg(p \wedge q)$". On remarque la différence entre cette proposition et celle où seul le premier conjoint est nié : "$\neg p \wedge q$". En principe, on aurait dû mettre "$(\neg p) \wedge q$", mais on adoptera la convention que "$\neg$" relie 'plus fortement' que "$\wedge$" : ce qui signifie que "$\wedge$" relie des propositions avec leurs éventuelles négations.

En déterminant que "$\wedge$", par exemple, est un connecteur qui relie deux formules bien formées pour en faire une nouvelle formule bien formée, on n'a encore rien spécifié sur la *signification* de ce connecteur. D'après tout ce que nous savons ('officiellement'[1]), ce connecteur pourrait signifier la même chose que "il est le cas en Australie que ... mais ici il est le cas que $\cdots$", "Sam a dit que ... mais il me semble plutôt que $\cdots$", "... et je suis malade si et seulement si $\cdots$". Mais comment donner une signification précise à ces connecteurs ?

C'est là que *la sémantique* commence à intervenir. Faire la sémantique d'une expression, c'est lui attribuer une signification particulière. Dans les langages naturels, beaucoup de facteurs contribuent à la signification d'un mot, et le même mot peut avoir plusieurs significations (un cas d'ambiguïté) ou varier de signification selon son contexte d'utilisation (un cas d'indexicalité). Dans des langues formelles, qui ne sont pas parlées et sont construites artificiellement, la signification des mots est beaucoup plus facile à déterminer, car en effet la signification d'une phrase coïncide avec ses *conditions de vérité* ; et ce sont ces conditions de vérité qu'on a appelées la *proposition* qui elle, est exprimée par une phrase dans un certain contexte d'énonciation. Dire que la proposition exprimée par une phrase

[1] Je dis "'officiellement' parce que j'ai déjà introduit des significations 'informelles' entre parenthèses. Je l'ai fait pour rendre possible la lecture des formules – mais rien dans notre petite théorie ne détermine qu'avec "et" j'aie voulu parler de la conjonction : j'aurais pu parler d'un connecteur bizarre comme "est vrai selon Sam mais Maria affirme que".

est vraie (et donc que la phrase, telle qu'elle est utilisée dans ce contexte, est elle-même vraie), c'est dire que ses conditions de vérité sont satisfaites. Connaître la signification d'une phrase (savoir quelle proposition elle exprime), c'est pouvoir déterminer, de n'importe quelle situation possible, si la phrase décrit correctement cette situation ou non (si elle est vraie ou fausse par rapport à cette situation). Autrement dit, les conditions de vérité sont des conditions que le monde doit satisfaire pour rendre vraie la phrase en question.[2]

Mais il reste toujours une distinction importante à faire, à savoir celle entre les logiques extensionnelles et les logiques intensionnelles. La logique propositionnelle et la logique des prédicats sont des logiques extensionnelles, alors que la logique modale, la logique epistémique et beaucoup d'autres logiques sont des logiques intensionnelles. Comparons les arguments suivants :

(2a) Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage. J'étudie la logique. Donc je serai heureux et sage.

(2b) Tous les hommes sont mortels. Socrate est un homme. Donc Socrate est mortel.

(2c) Il est nécessaire que 9 soit la somme de 5 et 4. 9 est la somme de 3 et 6. Donc il est nécessaire que la somme de 3 et 6 soit (identique à) la somme de 5 et 4.

(2d) Je sais tout ce que Robert a dit. Tout ce que Robert a dit est qu'il est fatigué et en a marre. Donc je sais que Robert est fatigué et en a marre.

Dans des contextes respectifs, ces quatre arguments sont tous convaincants. Mais seulement les deux premiers sont valides – dans la logique propositionnelle et dans la logique des prédicats respectivement (le premier sera également valide dans la logique des prédicats qui est une extension de la logique propositionnelle). Cela veut dire que si leurs prémisses sont vraies, alors leurs conclusions le sont aussi. On a dit que la validité de ces inférences ne dépend que de leur forme et que toutes les inférences ayant la même forme sont également valides. La première inférence, par exemple, est conforme au schéma valide suivant :

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q} \quad \text{(modus ponendo ponens)}$$

Pour arriver à ce schéma à partir d'une inférence particulière comme (2a), il faut faire abstraction de toutes les particularités des phrases et ne les considérer que par rapport à leur capacité à être vraies ou fausses. Pour savoir si je peux ou non conclure que je serai heureux et sage car je fais de la logique, et que si je fais de la logique, alors je serai heureux et sage ; il me faut connaître la vérité de ces prémisses : si elles sont vraies, alors je serai heureux et sage. Je pourrais conclure mon bonheur et ma sagesse d'une infinité d'autres prémisses, si elles étaient également vraies :

(2a') Si je n'étudie pas la logique, je serai heureux et sage. Je n'étudie pas la logique. Donc je serai heureux et sage.

(2a") Si je vais à la maison maintenant, je serai heureux et sage. Je vais à la maison maintenant. Donc je serai heureux et sage.

C'est pourquoi la logique propositionnelle standard est une logique que l'on appelle "extensionnelle" : la validité de ses inférences ne dépend que de la vérité (= l'extension) des propositions qu'elles contiennent.

[2] Dans des cas d'indexicalité, les conditions de vérité varient avec le contexte d'énonciation. La condition de vérité de la phrase "J'ai faim maintenant" est que Philipp a faim le 31 décembre 2006, à 18 h : la phrase est vraie (exprime une proposition vraie) si et seulement si Philipp a faim le 31 décembre 2006, à 18 h. Énoncée par quelqu'un d'autre ou à un autre moment, la phrase aurait d'autres conditions de vérité.

Contrastons ce cas avec (2c). Savoir si je peux ou non inférer la (vérité de la) conclusion de (la vérité de) ses prémisses ne dépend pas seulement de la vérité de ses prémisses : il importe également de savoir si la deuxième prémisse est nécessaire ou pas. Ceci devient apparent si on remplace la deuxième prémisse par une autre ayant la même valeur de vérité, c'est-à-dire une prémisse qui est également vraie :

(2c') Il est nécessaire que 9 soit la somme de 5 et 4. 9 est le nombre des planètes. Donc il est nécessaire que le nombre des planètes soit la somme de 4 et 5.

(2c") Il est nécessaire que 9 soit la somme de 5 et 4. 9 est mon nombre préféré. Donc il est nécessaire que mon nombre préféré soit la somme de 4 et 5.

Même si leurs prémisses sont vraies, la conclusion de ces deux arguments est fausse. On voit donc que la validité d'une inférence en logique modale ne dépend pas seulement de la vérité des propositions concernées, mais également de leurs intensions,[3] en particulier de la question de savoir si elles sont nécessaires ou non.[4]

La distinction entre logiques extensionnelles et logiques intensionnelles repose sur la distinction entre extension et intension, une distinction technique de la philosophie du langage qui s'applique à toutes les expressions.[5] Ne considérant que les expressions qui sont des phrases (et dont l'extension est donc la valeur de vérité), on obtient un cas spécial de l'extensionnalité : le principe de *vérifonctionnalité*, qui dit que la valeur de vérité d'une proposition complexe ne dépend que des valeurs de vérité de ses propositions constituantes et des connecteurs logiques qui les relient. Le principe de vérifonctionnalité est donc aussi un cas particulier du principe de la compositionalité.

La vérifonctionnalité des connecteurs propositionnels signifie qu'on détermine la signification d'une proposition complexe qui les contient en déterminant sa valeur de vérité dans toutes les différentes possibilités selon lesquelles on peut attribuer des valeurs de vérité à ses constituants. On appelle une telle manière d'attribuer des valeurs de vérité aux constituants une *interprétation* de la proposition complexe. Une interprétation de la proposition complexe "Si Jean est malade, alors Maria est sage et heureuse et Pierre a eu raison", par exemple, consiste en l'attribution de **v** (vrai) à "Jean est malade"

---

[3]"Intension" désigne l'ensemble de conditions qui permettent de définir un concept. Bien que l'extension de "la lune" et "le corps céleste le voisin le plus proche de la Terre dans l'espace" ont la même extension (= se réfèrent à la même chose), leurs définitions ou intensions doivent être différentes, parce qu'il est (métaphysiquement) possible que Vénus soit plus proche de la terre que la lune ne l'est maintenant.

[4]La même chose vaut pour la logique epistémique : pour que la conclusion de (2d) s'ensuive de ses prémisses, il faut que je *sache* que tout ce que Robert a dit est qu'il est fatigué et en a marre.

[5]La distinction entre "intension" et "extension" a été introduite par Carnap (1947) qui voulait ainsi préciser une distinction faite par Gottlob Frege (1892b) entre le sens ("Sinn","sense") et la référence (ou dénotation,"Bedeutung","reference") d'un terme singulier (un mot qui ne désigne qu'une chose) (cf. Frege 1971: pour une traduction française). Selon Frege, un terme singulier comme "le président des États-Unis" a comme référence un individu spécifique, c'est-à-dire George W. Bush dans notre cas, et comme sens une condition que cet individu doit remplir pour être le référent du terme, c'est-à-dire *être le président des États-Unis*. La différence pour les prédicats ("termes généraux") et les phrases, est déjà plus controversée. Dans la théorie originale de Frege, la référence d'un prédicat comme "... est bleu" était le concept ("Begriff") BLEU ou BLEUITÉ, et la référence d'une phrase était sa valeur de vérité (pour Frege, le sens d'une phrase était la pensée qu'elle exprime). Carnap remplaçait cette distinction par la suivante :

	extension	intension
terme singulier "Fred"	le référent Fred, l'homme	un critère d'identification *le père de Nathalie, frère de Gerhard etc.*
prédicat "bleu"	l'ensemble toutes les choses bleues	le concept fonction qui détermine quels objets, dans une situation considérée, sont les choses bleues
phrase "p"	la valeur de vérité **v** ou **f**	la proposition fonction qui détermine si, dans une situation considérée, "p" est vrai

et à “Pierre a eu raison” et de **f** (faux) à “Maria est sage et heureuse”. Cette attribution des valeurs de vérité aux constituants simples nous oblige, logiquement, à attribuer **f** à la conjonction “Maria est sage et heureuse et Pierre a eu raison” (puisqu'une conjonction ne peut pas être vraie si un des conjoints est faux) et elle nous oblige aussi à attribuer la valeur **f** à l'implication toute entière, puisque son antécédent est vrai et son conséquent faux. C'est la logique propositionnelle qui détermine ces obligations en nous montrant comment la valeur de vérité de la proposition complexe dépend de l'interprétation choisie.

C'est par une *table de vérité* que l'on montre de quelle manière la valeur de vérité de la proposition complexe est fonction de la valeur de vérité de ses constituants. Par exemple, on dit ce qu'on entend par le connecteur unaire “$\neg$” en disant que “$\neg p$” est vraie si “p” est fausse et que “$\neg p$” est fausse si “p” est vraie. On détermine la signification de “$\wedge$” en disant que “$p \wedge q$” est vraie si “p” et “q” sont toutes deux vraies et fausses autrement. Mais considérons ces connecteurs plus en détail.

2.2 La négation

Dans les langues naturelles, il existe de nombreuses manières de nier une phrase telle que “j'aurais pu l'aider” :

N1 Il n'est pas le cas que j'aurais pu l'aider.

N2 Il était impossible pour moi de l'aider.

N3 Je n'aurais pas pu l'aider.

N4 L'aider m'était impossible.

N5 Aurais-tu pu l'aider ? Non.

N6 Il est faux que j'aurais pu l'aider.

Ce que toutes ces manières de nier “j'aurais pu l'aider” ont en commun, et la raison pour laquelle toutes ces phrases sont formalisées par “$\neg p$” est qu'elles sont vraies si et seulement s'il est faux que j'aurais pu l'aider. L'essence de la négation est donc qu'elle inverse la valeur de vérité de la proposition à laquelle elle est attachée : si cette dernière est vraie, sa négation est fausse ; si elle est fausse, sa négation est vraie. Nous pouvons donc définir la signification de “$\neg$” par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ce tableau détermine la valeur de vérité de “$\neg p$” pour toutes les ‘possibilités logiques’ concernant la valeur de vérité de “p”.[6] Comme dans une logique qui obéit au principe de bivalence (comme les logiques standards propositionnelles et des prédicats), toute proposition est ou bien vraie ou bien fausse, il n'y en a que deux : “V” (“vrai”) et “F” (“faux”).[7] Chacune de ses possibilités logiques correspond à une *interprétation* de la phrase “p” où selon l'une elle est vraie (et “$\neg p$” est donc fausse) ; et où selon l'autre, elle est fausse (et “$\neg p$” est donc vraie). Une interprétation est l'attribution d'une valeur de vérité (de “V” ou de “F”) à une proposition. Pour donner la sémantique de “$\neg$”, il faut spécifier de quelle manière la valeur de vérité d'une proposition complexe qui contient “$\neg$” dépend des valeurs de vérité

[6]Nous appelons “possibilités logiques” les combinaisons consistantes de valeurs de vérités pour les phrases atomiques : une possibilité logique correspondra à une ligne dans un tableau comme celui que l'on vient de donner.

[7]La définition des valeurs de vérité est une question intéressante. Gottlob Frege les a pris pour des objets (‘logiques’). Lorsque j'utilise “V” et “F” dans les tables de vérité, je ne veux pas parler d'objets, mais seulement spécifier la possibilité logique en question (comme possibilité qui est telle que si elle était actuelle, alors la proposition en question serait vraie ou fausse respectivement). Lorsque je parle des valeurs de vérité comme je parlerais des objets, j'utilise “**v**” et “**f**”.

de ses constituants – c'est ce que fait notre table de vérité. C'est pourquoi la table de vérité ci-dessus détermine (complètement) la signification de "$\neg$".

On peut distinguer la négation interne de la négation externe. La négation externe, qui correspond à notre connecteur "$\neg$", est un opérateur : elle s'applique à une phrase pour en faire une autre phrase (la négation de la première). Au contraire, la négation interne s'applique à un prédicat et en fait un autre, qui, au moins dans les cas paradigmatiques, s'applique à un objet si et seulement si le premier ne s'applique pas à cet objet. Dans les langages naturels, il n'est souvent pas clair quel est le type de négation dans une phrase. Considérons

- Il n'est pas le cas que la solution de cette équation est plus grande que 2.
- La solution de cette équation n'est pas plus grande que 2.

La deuxième phrase, surtout si elle est interprétée comme synonyme de "la solution de cette équation est égale ou plus petite que 2" présuppose que cette équation a une solution, ce que la première phrase ne fait pas. Si la deuxième est prise comme synonyme de "la solution de cette équation est 1 ou 2", elle présuppose même que la solution est un nombre naturel.[8] Ces présuppositions peuvent échouer. C'est pour cela que la négation interne dans les langues naturelles ne manifeste souvent pas ce que nous avons identifié comme l'essence de la négation (en logique) : elle n'est pas toujours vraie si la proposition positive qu'elle modifie est fausse.

Suivant Frege, nous adopterons donc par la suite la thèse selon laquelle toute proposition qui n'est pas vraie est fausse et toute proposition qui n'est pas fausse est vraie.[9] Ceci s'ensuit de notre acceptation des trois principes suivants :

- Le *principe de bivalence* dit que où bien "p" est vrai ou bien "p" est faux (il n'y a pas de troisième 'valeur de vérité' comme 'indéterminé', 'vrai et faux', 'inconnu' etc.).
- Le *principe de non-contradiction* dit que, pour toute proposition "p", il n'est pas possible que "p" *et* "$\neg p$" soient vraies ensemble. Si "p" est vraie, alors "$\neg p$" ne l'est pas ; si "$\neg p$" est vraie, alors "p" ne l'est pas.
- Le *principe du tiers-exclu* dit que soit "p" soit "$\neg p$" est vraie – que "$p \vee \neg p$" ("soit p soit $\neg p$") est une vérité logique.[10]

Il n'y a que très peu de philosophes qui nient le principe de non-contradiction, c'est-à-dire qui pensent que "p" et "$\neg p$" peuvent tous deux être vrais ensemble – on les appelle les 'dialétheistes' et le logicien

[8] Cette distinction a motivé Russell dans son analyse des descriptions définies comme "le roi de France". Si nous nous posons la question de savoir si ou non le roi de France est chauve, une réponse affirmative *et* une réponse négative semble nous obliger à l'affirmation qu'il y a un roi de France, Russell (1905) a argumenté que la négation externe de "le roi de France est chauve" est "il n'est pas le cas qu'il y a exactement un individu qui est le roi de France et qui est chauve".

[9] Par rapport à des langues naturelles, cette présupposition est très douteuse. Mis à part les propositions qui commettent des 'erreurs de catégorie' comme "Le nombre 2 est célibataire", celles-ci contiennent aussi des phrases qui ont des présuppositions qui peuvent ne pas être satisfaites, comme "Le roi de France est chauve" présuppose qu'il y ait un roi de France qui est soit chauve, soit chevelu.

[10] Graphiquement, ces trois principes peuvent être interprétés comme suit : Imaginons une partition de l''espace logique' des valeurs de vérité des propositions. Le principe de bivalence dit alors qu'il ne faut considérer que deux possibilités – qu'une proposition soit vraie ou qu'elle soit fausse :

vrai	faux

Le principe du tiers-exclu (= que "$p \vee \neg p$" est une vérité logique) dit qu'il faut placer soit "p" soit "$\neg p$" dans la colonne gauche. Le principe de non-contradiction dit que l'une des deux doit être placé dans la colonne de gauche. Le principe de bivalence dit que tout ce qu'on ne place pas à gauche doit être placé à droite (que la distinction entre les propositions vraies et fausses est une distinction exhaustive).

Graham Priest en est un exemple (cf. Priest 1993). De nombreux philosophes, cependant, nient le principe du tiers-exclu : selon eux, “$p \vee \neg p$” n’est pas une vérité logique. Les intuitionnistes, par exemple, interprètent l’affirmation qu’on a prouvé “$p \vee \neg p$” comme une affirmation que soit on a prouvé que p, soit on a prouvé que $\neg p$ (cf. Dummett 2000). Dans de nombreux cas, ni l’un ni l’autre n’est possible (prenons par exemple “soit il pleut demain, soit il ne pleut pas demain” – comment pourrais-je *prouver* la présence ou l’absence de la pluie pourdemain ?). Enfin, ceux qui nient le principe de bivalence sont ceux qui préfèrent une logique à plusieurs valeurs de vérité, par exemple une logique qui accorde aux propositions dont on ne sait pas si elles sont vraies ou fausses la valeur de vérité ‘inconnu’.

Étant donné que la contribution de “$\neg$” aux conditions de vérité d’une proposition complexe qui la contient comme connecteur principal est l’inverse des valeurs de vérité (de “V” en “F” et vice versa), une autre caractéristique de la négation est la loi de la double négation :

(1) $$\frac{\neg\neg p}{p}\ \neg\mathbf{E}$$

La validité de ce schéma d’inférence signifie qu’on peut inférer “p” de la phrase doublement niée “$\neg\neg p$” : elle nous donne le droit d’ ’éliminer’ la double négation (d’où le nom “$\neg$**E**” pour **E**limination de la (double) négation).[11]

La négation est particulièrement importante pour les preuves par réduction à l’absurde (*reductio ad absurdum*). L’idée d’une telle preuve est la suivante : on suppose qu’une proposition particulière est vraie (même si on croit qu’elle est fausse). Sous cette supposition, on montre qu’il s’ensuit quelque chose d’absurde (une proposition dont on *sait* qu’elle est fausse). On conclut que la supposition initiale était fausse – si elle était vraie, une chose dont on sait qu’elle est fausse serait vraie, alors elle est fausse. Si on abrège par “$\perp$” n’importe quelle proposition dont on sait qu’elle est fausse (“$\perp$” représente donc ‘l’absurde’), on peut formuler cette règle comme suit :

(2) $$\frac{p \rightarrow \perp}{\neg p}\ \neg\mathbf{I}*$$

On reviendra sur ce schéma d’inférence plus tard.[12]

L’élimination de la double négation s’ensuit des principes de non-contradiction et du tiers-exclu. La loi de non-contradiction dit qu’il n’est pas possible que “p” et “$\neg p$” soient tous deux vrais. Si alors “$\neg\neg p$” est vrai, alors “$\neg p$” ne l’est pas. Par le principe du tiers exclu, si “$\neg p$′′ n’est pas vrai, alors “p” est vrai. Donc : si “$\neg\neg p$” est vrai, alors “p” l’est aussi.

2.3 La conjonction

Considérons les phrases suivantes :

C1 Ils se sont mariés et ont eu un enfant.

C2 Ils ont eu un enfant et se sont mariés.

C3 Pierre et Paul étudient la logique, mais ils sont heureux et sages.

[11] En acceptant que la règle de l’élimination de la double négation est valide, nous faisons un autre pas qui nous éloigne des langues naturelles. Dans beaucoup de contextes, il y a une différence entre “Je suis d’accord” et “Il n’est pas le cas que je suis en désaccord”.

[12] Nous avons rencontré ce schéma d’inférence déjà dans l’argument contre l’existence de Dieu à la p. 27 : conclure de “si Dieu existe, alors il n’existe pas” que Dieu n’existe pas est une instance de $\neg\mathbf{I}*$.

C4 Elle est allée voter bien que sa mère lui disait de rester à la maison.

C5 Je suis heureux et sage.

C6 Je suis heureux, mais sage.

Qu'est-ce qui nous permet de dire qu'il s'agit de phrases conjonctives, même si, par exemple "je suis heureux parce que je suis sage" et "je suis heureux ou sage" ne le sont pas ? L'important semble être que la vérité d'une phrase conjonctive entraîne la vérité de ses deux conjoints et que la vérité de ses deux conjoints entraîne la vérité de la phrase conjonctive. On peut donc dire que l'essence de la conjonction, "$\wedge$", est qu'elle rend les inférences suivantes valides :

(3) $\dfrac{p, q}{p \wedge q}\ \wedge\mathbf{I} \qquad \dfrac{p \wedge q}{p}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \dfrac{p \wedge q}{q}\ \wedge\mathbf{E}$

Il s'agit des règles d'introduction ("$\wedge$**I**") et d'élimination ("$\wedge$**E**") de notre connecteur "$\wedge$" : on peut inférer une conjonction de ses deux conjoints et on peut inférer les conjoints de la conjonction.

Si on considère que le comportement inférentiel (et donc, dans une logique extensionnelle, la signification) du connecteur "et" est déterminé par $\wedge$**I** et $\wedge$**E** et si on formalise les phrases (**C1**) à (**C6**) par "$\wedge$", on perd de nombreuses nuances de significations que ces phrases ont dans la langue naturelle. Par exemple, on ne fait pas de distinction entre "et" et "mais" (et donc pas de distinction entre (**C5**) et (**C6**)). Frege, en argumentant pour une logique extensionnelle, disait que cette différence n'appartient pas au domaine de la signification au sens restreint du mot, mais au domaine de ce qu'il appelle le "ton" ou la "couleur" ("Färbung") d'une phrase. La signification d'une expression, au sens restreint, est ce qui est préservé par une bonne traduction. Les différences entre "et" et "mais", cependant, sont des différences de tonalité qui peuvent même se perdre dans une bonne traduction.[13]

Nos exemples nous montrent aussi qu'il faut parfois reformuler une phrase pour rendre manifeste sa structure logique : (**C3**), par exemple, devient la phrase barbare : "Pierre étudie la logique et Paul étudie la logique et Pierre est heureux et Paul est heureux et Pierre est sage et Paul est sage".[14] Cette transformation n'est pas toujours évidente par rapport à des phrases de la langue naturelle.[15] C'est aussi pour cette raison que nous travaillerons avec une langue formelle.

La conjonction, formalisée par "$\wedge$", est commutative : cela veut dire que "$p \wedge q$" et "$q \wedge p$" sont équivalentes – il n'y a pas de raisons logiques de les distinguer. Ce qui distingue "Ils se sont mariés et ont eu un enfant" (**C1**) et "Ils ont eu un enfant et se sont mariés" (**C2**) ne concerne donc pas la logique. La logique extensionnelle ne concerne que la manière dont la valeur de vérité d'une proposition de la forme "$p \wedge q$" dépend des valeurs de vérité de "p" et de "q". La signification de "$\wedge$" est donc déterminée par la table de vérité suivante :

---

[13] En général, le 'ton' sert à manifester l'attitude de celui qui utilise une phrase par rapport à ce qu'il dit. En utilisant "mais" au lieu de "et", par exemple, je peux rendre visible que je pense qu'il y a un contraste entre les deux propositions. En utilisant "canasson" au lieu de "cheval", je peux exprimer une attitude négative etc. Il est souvent difficile de dire qu'elle est l'attitude signalée par l'usage d'un certain mot : il n'est pas, p. ex., exact de dire que "p, mais q" signale toujours un contraste entre ces phrases – parfois le contraste est plutôt entre des raisons pour et contre une autre phrase, comme quand je répond à la proposition d'inviter le prof. X de donner une conférence par "Il est un très bon philosophe, mais actuellement aux États-Unis."

[14] Etant donné que la conjonction est commutative (c'est-à-dire "p et q" et vrai si et seulement si "q et p" l'est aussi), nous n'avons pas besoin de mettre des parenthèses.

[15] Comparons par exemple "Marie et Simone ne sont pas contentes de leurs maris." Le sens de la phrase, mais pas forcément sa forme, nous oblige à transformer cette phrase en "Marie n'est pas contente de son mari et Simone n'est pas contente de son mari *à elle*", même si, par exemple "Marie et Simone ne sont pas contentes des élections" donne "Marie n'est pas contente des élections et Simone n'est pas contente des élections." Un autre problème concerne la conjonction 'collective' comme dans "Pierre et Paul ont soulevé le piano". Ceci peut être vrai sans que "Pierre a soulevé le piano" et "Paul a soulevé le piano" soient vraies. Il ne s'agit donc pas d'une conjonction au sens logique.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

On voit que "$p \wedge q$" n'est vraie que si les deux propositions "p" et "q" sont vraies – si au moins une est fausse, "$p \wedge q$" l'est aussi.

2.4 La disjonction

Considérons les assertions suivantes :

D1 Il pleut ou il ne pleut pas.

D2 [Qu'est-ce que tu veux dans la vie ?] Me marier, être heureux ou gagner un million.

D3 [Qui prendras-tu dans ta voiture ?] Jean-Pierre ou Paul.

D4 [Qui gagnera à la loterie ?] Je vais gagner ou tu vas gagner.

D5 [A quelle heure arrive-t-elle ?] A six ou à sept heures.

D6 Tu es ou seras heureux ou sage.

Ce que toutes ces phrases on en commun, c'est qu'elles sont vraies si un de leurs disjoints est vrai. Il suffit qu'il ne pleuve pas pour que (**D1**) soit vraie, que je me marie pour avoir réussi dans ma vie (**D2**), prendre Paul ou arriver à six heures pour tenir mes promesses (**D3** et **D5**), que tu gagnes (**D4**), que tu sois sage (**D6**). Comme auparavant, il faut parfois élargir les phrases pour rendre explicites leurs formes logiques : (**D6**), par exemple, devient : "tu es heureux ou tu seras heureux ou tu es sage ou tu seras sage".

D'autre part, il nous faut distinguer la disjonction inclusive de la disjonction exclusive. Une disjonction inclusive est vraie si et seulement si *au moins un* des disjoints est vrai, y compris lorsque les deux propositions disjointes sont vraies. C'est l'interprétation naturelle des phrases (**D2**) et (**D4**) : il serait absurde, au cas où tous mes voeux se réalisent, ou dans celui où nous gagnons tous deux à la loterie, de dire que les réponses aux questions (**D2**) et (**D4**) sont fausses. C'est la disjonction inclusive qui est formalisée par "$\vee$" (qui vient du latin "vel"). Une disjonction exclusive ("aut" en latin) est vraie si et seulement si l'un des disjoints, mais pas les deux, est vrai. C'est l'interprétation naturelle de (**D3**) (étant donné que je n'ai qu'une seule place de libre dans ma voiture) et de (**D5**) (étant donné qu'elle n'arrive qu'une seule fois). Dans certains cas, l'interprétation exclusive est la seule possible, comme pour "boire ou conduire". L'incompatibilité des disjoints dans un cas de disjonction exclusive vraie peut être due à différentes raisons. Même dans le cas où ces raisons sont des raisons logiques, comme dans (**D1**), nous ne sommes cependant pas obligés de formaliser une disjonction comme disjonction exclusive. Quand il le faut, nous pouvons toujours ajouter "et non pas les deux" à une disjonction inclusive.[16]

L'essence de la disjonction (inclusive) est qu'une proposition disjonctive est vraie si et seulement si au moins l'un de ses disjoints est vrai. La signification du connecteur "$\vee$" est donc déterminée par la table de vérité suivante :

[16] De même, on peut ajouter "ou les deux" pour rendre explicite qu'il s'agit d'une disjonction inclusive, ce qui peut avoir des effets rhétoriques : "Interrogé sur les auteurs [des] attaques [récentes], George W. Bush a estimé "qu'ils sont soit, ou à la fois, et probablement les deux, des baassistes ou des terroristes étrangers", faisant allusion aux membres du parti du dirigeant déchu Saddam Hussein. "Ils veulent tuer et créer le chaos", a-t-il souligné, ajoutant que les terroristes "veulent nous voir partir, mais nous ne partons pas"." (*Le Monde*, 29 octobre 2003) – même s'il nous semble difficile d'imaginer quelqu'un qui soit à la fois iraquien et terroriste étranger.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Comme dans le cas de la conjonction, on peut également caractériser la signification de "$\vee$" en termes d'inférences qui l'introduisent dans des formules ou l'éliminent d'une formule :

(4) $\dfrac{p}{p \vee q}\ \vee\mathbf{I}$ $\qquad \dfrac{q}{p \vee q}\ \vee\mathbf{I}$ $\qquad \dfrac{p \vee q, \neg p}{q}\ \vee\mathbf{E}$

Les deux règles d'introduction nous disent qu' on peut inférer "$p \vee q$" si l'on a établi "p" (et aussi qu'on peut inférer "$p \vee q$" si l'on a établi "q") et que l'on peut éliminer des disjonctions dont on a établi que l'un des disjoints est faux : si l'un est faux, l'autre doit forcément être vrai. Cette règle d'inférence $\vee\mathbf{E}$ s'appelle "le syllogisme disjonctif" et sa validité avait déjà été reconnue par Aristote. Voici quelques exemples :

- Je serai heureux ou sage. Je ne serai pas sage. Donc je serai heureux.
- Je choisis soit une soupe soit une salade. Je ne choisis pas une soupe. Donc je choisis une salade.
- Il faut soit être vigilant soit ne pas avoir peur. Il n'est pas le cas qu'il faut être vigilant. Donc il faut ne pas avoir peur.

On rencontrera, à la p. 118 du ch. 6, une règle d'élimination de la disjonction un peu plus compliquée que $\vee\mathbf{E}$.

2.5 L'implication et l'équivalence matérielle

Considérons les assertions suivantes :

I1 Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage.

I2 A condition qu'elle fasse les exercices, elle réussira l'examen.

I3 Étant donné que je n'ai rien d'autre à faire, je peux très bien sortir ce soir.

I4 Quand il pleut, je suis triste.

I5 Si je ne m'appelle pas Arthur, je ne ferai jamais de logique.

I6 Si je ne fais jamais de logique, alors je m'appelle Arthur.

Toutes ces phrases peuvent être formalisées par le connecteur "$\rightarrow$" ("si ... alors $\cdots$"),[17] qu'on appelle l'"implication matérielle", à condition qu'elles soient fausses si et seulement si leur antécédent (la proposition qui suit le "si") est vrai et leur conséquent (la proposition qui suit le "alors") est faux. Même si cette condition est certainement nécessaire,[18] il peut paraître douteux qu'elle soit aussi suffisante. Les cas délicats sont ceux dans lesquels l'antécédent est faux : est-ce que cela suffit pour que l'implication soit vraie quelque soit le conséquent ? Dans la langue naturelle, on est dans de nombreux cas tenté de dire non : il faut qu'il y ait une connexion entre l'antécédent et le conséquent, que l'antécédent,

[17] "Si ... alors $\cdots$" n'est pas toujours l'expression la plus commode à substituer pour "$\rightarrow$", parce qu'elle nécessite un changement dans l'ordre des phrases. Parfois "$\cdots$ seulement si ..." est plus appropriée car elle relie les mêmes phrases mais dans l'ordre opposé.

[18] Il me semble incontestable que quelqu'un qui affirme (**I1**) à (**I6**) a tort si, respectivement, j'étudie la logique mais je ne serai pas heureux ni sage ; elle fait les exercices mais elle échoue à l'examen ; je n'ai rien d'autre à faire mais il n'est pas le cas que je peux sortir ce soir ; il pleut, mais je ne suis pas triste ; je m'appelle Arthur et ferai de la logique ; je ne fais jamais de logique, mais ne m'appelle pas Arthur.

s'il est vrai, rende le conséquent probable, qu'il explique pourquoi le conséquent est vrai etc.[19] Les défenseurs de cette thèse et de ce qu'ils appellent l'"implication stricte" pensaient qu'une implication n'est vraie que si l'antécédent nécessite le conséquent – s'il est impossible (et pas seulement faux) que l'antécédent soit vrai et le conséquent soit faux (Ackermann 1950). La logique propositionnelle standard, cependant, n'a pas choisi cette voie : pour elle, il suffit pour la vérité d'une implication "si p alors q" qu'il ne soit pas le cas que "p" est vraie et "q" est fausse – l'antécédent ne formule qu'une condition suffisante, mais aucunement nécessaire pour le conséquent.[20] C'est pour distinguer cette relation d'implication, dont traite la logique standard, des types d'implications qui requièrent un lien plus étroit entre antécédent et conséquent, qu'on appelle la première "implication matérielle".

Il y a différentes manières de justifier cette décision d'interpréter "si p alors q" comme équivalent à "soit $\neg p$ soit q". L'argument le plus pertinent est que cette relation joue certainement un rôle important dans notre raisonnement propositionnel : des 16 connecteurs binaires vérifonctionnels (qui correspondent aux différentes possibilités de distribuer V et F sur quatre places, cf. ci-dessous, p. 48), 'V-F-V-V' est celui qui correspond le plus à notre usage de "si ... alors $\cdots$". Un autre argument consiste à dire que les phénomènes qui intéressaient les défenseurs de l'implication stricte sont mieux expliqués à l'aide d'une distinction entre implication et conséquence (cf. les pages pp. 63 et suivants dans la leçon 3) et entre les conditionnelles indicatives et subjonctives. Supposons que je tienne un crayon particulier et que je ne le lâche pas. Considérons les phrases suivantes :

I7 Si je lâche le crayon, il tombe par terre.

I8 Si je lâche le crayon, il se colle au plafond.

Nous pensons, intuitivement, que si l'une des deux propositions doit être vraie, ce sera plutôt la première. Pourtant, l'antécédent des deux conditionnels ("Je lâche ce crayon") est faux dans la situation envisagée et donc les deux sont vraies dans la logique propositionnelle standard. Au lieu d'introduire une implication plus 'stricte', leur différence est expliquée par la différence entre deux autres phrases, à savoir les suivantes :

(2e) Si je lâchais le crayon, il tomberait par terre.

(2f) Si je lâchais le crayon, il se collerait au plafond.

(**2e**) et (**2f**), qu'on appelle des 'implications subjonctives', ont un autre comportement logique que (**I7**) et (**I8**) : pour qu'elles soient vraies, il est requis qu'il soit *impossible* que je lâche le crayon sans qu'il tombe par terre et qu'il est *impossible* que je le lâche sans qu'il se colle au plafond. Comme la deuxième n'est pas le cas, (**2f**) est faux.[21]

---

[19] Cependant, cela n'est pas toujours évident. Même dans le langage naturel nous reconnaissons un certain type d'équivalence entre "Si je ne me trompe, vous êtes déjà venu" ("$\neg p \rightarrow q$") et "Soit je me trompe fort, soit vous êtes déjà venu" ("$p \vee q$") et entre "S'il me rencontre, il me salue toujours" ("$p \rightarrow q$") et "Il ne me rencontre jamais sans me saluer" ("$\neg(p \wedge \neg q)$").

[20] Une manière de rendre cela plausible est de penser les tables de vérité comme indiquant les possibilités que l'on exclut en affirmant une proposition complexe. Si je te dis "si tu es gentil, je te donnerai un bonbon", j'exclus la possibilité que tu sois gentil sans recevoir un bonbon. Cependant, je n'exclus pas que je te donne un bonbon pour d'autres raisons que ta gentillesse.

[21] Le problème de l'interprétation des implications subjonctives, qui sont aussi appelées 'contrefactuelles' (puisque l'usage du conditionnel suggère que l'antécédent ne soit pas le cas), est un problème majeur de la philosophie du langage. Certains, dont Quine, ont exprimé des doutes quant à l'existence d'une systématisation générale et satisfaisante de leur usage ordinaire. Comment attribuer, demandent-ils (cf. Quine 1950: 23), des valeurs de vérité aux phrases suivantes qui apparaissent être incompatibles

(2g) Si Bizet et Verdi avaient été des compatriotes, Bizet aurait été italien.

(2h) Si Bizet et Verdi avaient été des compatriotes, Verdi aurait été français.

Une implication matérielle, dans la logique propositionnelle standard, est vraie si et seulement s'il n'est pas le cas que l'antécédent est vrai et le conséquent faux. "Si p alors q" est donc traité comme équivalent à "ou bien $\neg p$ ou bien q". En appliquant le syllogisme disjonctif ($\vee$**E**) à la formule "$\neg p \vee q$", on obtient "Si $\neg\neg p$, alors q". En éliminant la double négation ($\neg$**E**), on retourne à "Si p, alors q". La signification de "$\rightarrow$", qui représente l'implication matérielle, est donc donnée par la table de vérité suivante :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cette table de vérité pour "$\rightarrow$" a comme conséquence immédiate que toute implication matérielle ayant un antécédent faux (comme (**I5**)) et toute implication matérielle ayant un conséquent vrai (comme (**I6**)) est vraie. Elle dit que si "$p \rightarrow q$" est vrai, alors la vérité de "p" est une *condition suffisante* pour la vérité de "q" et la vérité de "q" est une *condition nécessaire* pour la vérité de "p" : "p" ne peut pas être vrai sans que "q" le soit aussi et la vérité de "p" exclu le cas où "q" est faux. L'implication matérielle est donc étroitement liée à la validité du schéma d'inférence suivant :

(5) $$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q} \rightarrow \mathbf{E}$$

Cette inférence, qui nous autorise à 'éliminer' une implication si l'on a établit son antécédent est aussi appelée "modus ponens" (parfois, plus exactement, "modus ponendo ponens") : c'est en 'posant' quelque chose (à savoir "p") que nous pouvons 'poser' quelque chose d'autre (à savoir "q").

L'implication matérielle pose quelques problèmes particuliers de formalisation. Dans le langage ordinaire, on trouve souvent des énoncés qui ne formulent pas une condition suffisante, mais seulement une condition nécessaire :

I9 Il n'est content que si elle vient aussi.

(**I9**) ne spécifie pas une condition suffisante pour son bonheur futur, mais une condition nécessaire : si elle ne vient pas, il ne sera pas content. Il faut donc mettre la flèche dans la bonne direction : "s'il est content alors elle vient aussi" – on voit dans cet exemple que le langage ordinaire présuppose souvent un lien de causalité ou d'explication dans des phrases de la forme "si... alors $\cdots$". La logique, cependant, ne s'en occupe pas : tout ce qu'il faut pour rendre vraie la proposition "s'il est content alors elle vient aussi" c'est qu'il ne soit pas le cas qu'il est content et qu'elle ne vient pas.[22]

Un autre problème est posé par l'ordre des constituants : afin de formaliser les phrases suivantes, il faut intervertir l'ordre des propositions simples :

I10 Nous irons faire un pique-nique pourvu qu'il fasse beau temps.

I11 Je t'aide à condition que tu sois gentil.

(**I10**) devient alors "s'il fait beau temps, nous irons faire un pique-nique" ("il n'est pas le cas qu'il fasse beau temps et que nous n'allions pas pique-niquer") et (**I11**) devient "si tu es gentil, je t'aide" ("il n'est pas le cas que je t'aide et tu n'es pas gentil").

Considérons maintenant les phrases suivantes :

[22] Il ne faut pas confondre "... seulement si $\cdots$" avec "... si seulement $\cdots$" : dans le dernier cas, il s'agit d'un "si" ordinaire et "seulement" y est ajouté pour mettre une emphase.

E1 Je suis content si et seulement si elle me salue.

E2 Il me rend toujours visite – et seulement – quand j'ai quelque chose à manger chez moi.

E3 Elle y arrivera au cas où, mais seulement au cas où elle se dépêche.

E4 Elle y arrivera si, mais seulement si elle se dépêche.

Dans ces phrases, on dit que deux propositions sont soit vraies ensemble soit fausses ensembles – elles ont les mêmes valeurs de vérité. L'implication matérielle assure pour une part ceci : si l'antécédent est vrai, le conséquent doit l'être aussi. Ce que ces cas de l'*équivalence matérielle* ajoutent, c'est que si l'antécédent est faux, le conséquent doit l'être aussi. Si on utilise le principe de conversion (que de "si p, alors q", on peut déduire "si $\neg q$, alors $\neg p$"), on voit que l'équivalence matérielle est équivalente à une conjonction de deux implications : (**E1**) est équivalent à "Si elle me saluait, je serais content et si j'étais content, elle me saluerait" – que son salut est une condition suffisante (premier conjoint) et nécessaire (deuxième conjoint) à mon bonheur. On a donc les règles d'introduction et d'élimination suivantes :

(6) $$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q} \leftrightarrow \mathbf{I} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q} \leftrightarrow \mathbf{E} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p} \leftrightarrow \mathbf{E}$$

En termes de table de vérité, "$p \leftrightarrow q$" nous dit que "p" et "q" sont soit vraies soit fausses ensembles :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2.6 Les tables de vérité

Nous avons vu de quelle manière les différents connecteurs déterminent la valeur de vérité d'une proposition complexe comme une fonction des valeurs de vérité de ses constituants atomiques. C'est ainsi que nous pouvons calculer des tables de vérité (et donc la signification) de propositions complexes : en superposant leurs valeurs de vérité pour les différentes interprétations des propositions simples qu'elles contiennent.

Construisons une table de vérité pour "$\neg(\neg p \vee \neg q)$". Nous commençons par l'interprétation des propositions atomiques : étant donné qu'il y en a deux, "p" et "q", nous avons deux colonnes (quatre 'possibilités logiques') :

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Comme les deux propositions atomiques sont niées dans la formule "$\neg(\neg p \vee \neg q)$", nous ajoutons deux colonnes avec les valeurs de vérité de leurs négations :

p	q	$\neg p$	$\neg q$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

A partir de ces deux nouvelles colonnes, nous calculons la valeur de vérité de leur disjonction :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Dans notre formule initiale "$\neg(\neg p \vee \neg q)$", cette disjonction est niée :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

Dans la colonne de droite, on retrouve maintenant les valeurs de vérité de la formule initiale "$\neg(\neg p \vee \neg q)$" pour les quatre interprétations différentes de ses propositions atomiques. On voit que "$\neg(\neg p \vee \neg q)$" n'est vraie qu'à condition que les deux propositions atomiques "p" et "q" soient vraies ; si l'une d'entre elles (au moins) est fausse la proposition complexe l'est également.

La table de vérité nous montre de quelle manière la valeur de vérité de cette formule complexe dépend des valeurs de vérité de ses constituants qui – selon le principe de vérifonctionnalité – la 'composent' de manière fonctionnelle.[23]

Il existe une autre méthode pour arriver aux mêmes résultats. Nous commençons directement avec la formule dont les valeurs de vérité pour les différentes interprétations nous intéressent, et faisons une colonne pour chaque proposition atomique et connecteur qu'elle contient :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$

Nous ajoutons les interprétations pour les propositions atomiques dans toutes les colonnes correspondantes :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
		V			V
		V			F
		F			V
		F			F

Nous calculons leurs négations :

[23] Cela veut dire que l'attribution des valeurs de vérité aux constituants atomiques *détermine* la valeur de vérité de la formule complexe. Mathématiquement, une fonction qui relie deux ensembles, $f : A \rightarrow B$, est une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$), qui est telle que le choix de a détermine celui de b : il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents : $(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \rightarrow b' = b''\}$.

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
	F	V		F	V
	F	V		V	F
	V	F		F	V
	V	F		V	F

Toujours selon l'ordre dont la formule est construite avec ses constituants, nous calculons la disjonction à partir des colonnes 2 et 5 :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
	F	V	F	F	V
	F	V	V	V	F
	V	F	V	F	V
	V	F	V	V	F

Nous sommes donc arrivés au connecteur principal, qui est la négation de toute la parenthèse :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F

Nous avons mis la colonne de gauche en gras pour montrer qu'il s'agit de la colonne du connecteur principal et donc de celle où figurent les valeurs de vérité de la formule complexe. Cette colonne ne se trouve pas forcément à gauche.

Comme dans la première méthode, les différentes lignes (les différentes interprétations des propositions atomiques) représentent des possibilités logiques. Si la colonne qui correspond au connecteur principal ne contient que des "V", on appelle la formule en question une *"tautologie"*. Si elle ne contient que des "F", on l'appelle une *"contradiction"*. Une tautologie est une proposition vraie quelle que soit la possibilité logique considérée. Elle est vraie dans toutes les possibilités logiques ; elle est donc une 'nécessité logique'. On appelle de telles nécessités des "vérités logiques". Une proposition est logiquement vraie (une vérité logique) si et seulement si elle est vraie dans toutes les possibilités logiques, *i.e.* si elle est une tautologie.

2.7 Quelques tautologies

La notion de tautologie nous aide à établir la validité des inférences. Considérons l'inférence suivante :

> Si les communistes n'ont pas de succès, la république sera sauvée.
> La république sera sauvée.
> Donc les communistes n'ont pas de succès.

Il s'agit du 'sophisme de l'affirmation du conséquent' qui a la forme suivante.

Si les communistes n'ont pas de succès, la république sera sauvée.	$p \rightarrow q$
La république sera sauvée.	q
Donc les communistes n'ont pas de succès.	p

Mais pourquoi est-ce un sophisme ? Si nous voulons déterminer la validité de cet argument, nous avons à montrer que les prémisses ne peuvent pas être vraies et la conclusion fausse – qu'il n'y a pas d'interprétation qui rende vraies les prémisses et fausse la conclusion. Nous avons donc à montrer que l'implication matérielle correspondante est une tautologie. Construisons une table de vérité pour cette implication matérielle correspondante :

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

L'argument n'est pas valide car la troisième ligne ouvre la possibilité selon laquelle les prémisses seraient vraies et la conclusion, fausse. Celui qui pense que les communistes aurons du succès et que la république sera sauvée, pourrait affirmer les prémisses et nier la conclusion.

Cet exemple nous montre que les tables de vérités nous permettent à la fois de savoir si un argument est valide ou non (il est valide si et seulement si l'implication matérielle entre les prémisses et la conclusion est une tautologie), mais aussi de construire des contre-exemples à de fausses affirmations selon lesquelles telle ou telle proposition est tautologique.

Les tables de vérité sont également utiles pour gérer des arguments complexes ayant plusieurs prémisses. Rien ne nous empêche de considérer plus de deux propositions atomiques à la fois. Étant donné que les possibilités logiques sont déterminées par la vérité et la fausseté des propositions atomiques, il faut alors considérer plus de quatre interprétations : 8 ($= 2^3$) pour trois propositions atomiques, 16 ($= 2^4$) pour quatre, 32 ($=2^5$) pour cinq etc.

Les tables de vérité nous permettent d'illustrer la conséquence suivante du principe de vérifonctionnalité : comme le principe de vérifonctionnalité implique que la valeur sémantique (= la signification) d'un connecteur binaire (= à deux places) est complètement déterminée par sa table de vérité, il s'ensuit qu'il ne peut y avoir que 16 ($=2^{2^2}$) connecteurs binaires dans la logique propositionnelle. On peut constater cela en considérant les 16 possibilités différentes de distribuer les "V" et les "F" sur les quatre interprétations de "p" et "q" :

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Nous avons déjà considéré les colonnes 2 (disjonction), 4 (p), 5 (implication matérielle $p \rightarrow q$), 6 (q), 7 (équivalence), 8 (conjonction), 10 (négation de q), et 13 (négation de p). On retrouve dans la colonne 3, la 'contre-implication' ("$q \rightarrow p$") et on remarque que chaque opérateur a sa négation dans la colonne qui lui est symétrique par rapport à la double ligne qui se situe entre les colonnes 8 et 9. Ainsi 15 est la 'non-disjonction' ('rejet' : ni p ni q), 10 la 'non-équivalence' ('alternative' ou disjonction exclusive) et 9 est la 'non-conjonction' ('incompatibilité' : pas à la fois p et q). On reviendra sur les lignes 1 (tautologie) et 16 (contradiction) dans la section 3.2.

Points à retenir

1. La logique propositionnelle étudie les connecteurs propositionnels qui relient des propositions ; la logique des prédicats étudie en outre les quantificateurs, les relations et les fonctions.
2. Le connecteur principal d'une formule est le dernier à être évalué.
3. La syntaxe détermine quelles sont les formules bien formées d'une langue.
4. La sémantique donne les interprétations des signes ; elle leur associe une signification.
5. Selon le principe de vérifonctionnalité (pour la logique propositionnelle), les valeurs de vérité possibles d'une proposition complexe ne dépendent que des valeurs de vérité des propositions simples qui la constituent et des connecteurs qui les relient.
6. "$\neg p$" est vrai si et seulement si "p" est faux.
7. "$p \wedge q$" est vrai si et seulement si "p" et "q" sont vrais ensemble.
8. "$p \vee q$" est vrai si et seulement si au moins un de "p" et "q" est vrai.
9. "$p \rightarrow q$" est vrai si et seulement si soit "p" est faux, soit "q" est vrai.
10. Une table de vérité détermine la signification d'un connecteur propositionnel en montrant de quelle manière la valeur de vérité d'une proposition complexe qui le contient dépend des valeurs de vérités de ses constituants simples.