Chapitre 3

Relations logiques et inférences logiques

3.1 Le langage-objet et le métalangage

Nous avons vu dans la deuxième leçon (p. 37) qu'une négation est vraie si et seulement si la proposition niée *ne* l'est *pas*, qu'une conjonction est vraie si et seulement si le premier *et* le deuxième conjoint sont vrais, qu'une disjonction est vraie ssi le premier disjoint *ou* le deuxième est vrai, qu'une implication matérielle est vraie ssi *si* l'antécédent est vrai, *alors* le conséquent l'est aussi et enfin, qu'une équivalence matérielle est vraie ssi la première proposition est vraie *si et seulement si* la deuxième l'est aussi. Pour spécifier les tables de vérités des connecteurs propositionnels, nous avons utilisé ces mêmes connecteurs. Ces arguments ne sont-ils pas circulaires ? Ne s'agit-il pas d'un cercle vicieux ?

Pour répondre à ces questions, il faut revenir sur la distinction entre usage et mention. Bien sûr il peut y avoir une circularité epistémique – quelqu'un qui ne possède pas les concepts mêmes de ces relations logiques entre phrases, aurait des difficultés à comprendre leur sémantique. Mais, du fait de la distinction entre langage-objet et métalangage, il ne s'agit pas d'une circularité logique, ni d'un cercle vicieux.

Nous nous servons des mots pour parler du monde et des noms des mots pour parler des mots. Mettre des guillemets autour d'une expression linguistique est une manière – mais pas la seule – de former de tels noms.[1] On utilise un mot en énonçant une phrase qui le contient. On mentionne un mot en utilisant un nom pour ce mot (comme, par exemple, l'expression qui est formée par : des guillemets – le mot en question – et encore des guillemets.

Un avantage de la création des noms d'expressions à l'aide de guillemets est qu'elle peut être itérée : "Paris est jolie" parle de (mentionne) Paris et contient (utilise) "Paris". " "Paris" a six lettres" mentionne ou parle du mot "Paris" et contient ""Paris"". " "Paris"" désigne "Paris" qui désigne Paris. Le mot " "Paris"" contient six lettres et une paire de guillemets ; "Paris" contient six lettres et ne contient pas de guillemets ; et Paris contient des personnes, des bâtiments et une université.

Il y a une distinction entre différents niveaux de langage – entre le *langage-objet* et le *métalangage* –

---

[1] Une autre manière est de citer une phrase et de lui donner un numéro : c'est ainsi que nous donnons des exemples de phrases, comme les phrases (**3a**), (**3b**) et (**3c**) qui se suivent. Nous utiliserons donc les expressions "(**3a**)", "(**3b**)" et "(**3c**)" comme des noms pour ces phrases.

liée à la distinction entre l'utilisation et la mention d'un mot. La phrase :

(3a) Paris est une jolie ville.

est une phrase du langage-objet, puisqu'elle me sert à parler d'une réalité qui n'est aucunement linguistique. La phrase

(3b) "Paris" est mon mot préféré.

me sert à parler d'un mot du français : (**3b**) fait partie d'un métalangage, c'est-à-dire du langage à l'aide duquel je parle d'un autre langage – du langage-objet dont font partie des phrases comme (**3a**) (qui dans ce cas fait partie de la langue française). En itérant la procédure, on obtient :

(3c) " "Paris" est mon mot préféré." est une phrase bien formée du métalangage.

(**3c**) est une phrase qui appartient à un méta-métalangage, un langage qui permet de parler du métalangage dont fait partie la phrase (**3b**). La distinction entre langage-objet et métalangage est une distinction relative. (**3c**) est dans un métalangage relatif à (**3b**), lequel, à son tour, appartient à un métalangage relatif à (**3a**). C'est par rapport à (**3a**) que (**3c**) appartient à un méta-métalangage.

Nous retrouvons les mêmes phénomènes lorsque nous attribuons la vérité ou la fausseté à une phrase. Pour dire que (**3a**) est vraie, nous disons par exemple :

(3d) La phrase "Paris est une jolie ville." est vraie.

Nous aurions aussi pu utiliser un autre nom pour la même phrase, tel que :

(3e) (**3a**) est vrai.

Il faut distinguer les expressions comme "… est vrai" qui appartiennent au métalangage et les expressions comme "Paris", "$\wedge$" et "$\neg$", qui appartiennent au langage-objet. Les premières prennent des noms de phrases (du langage-objet) pour en faire des phrases (du métalangage), tandis que les dernières prennent des phrases (du langage-objet) pour en faire des phrases (du langage-objet). Pour dire d'une phrase qu'elle est vraie, je dois la mentionner ; pour ceci, il me faut normalement un nom pour elle. Dire d'une phrase qu'elle est vraie, c'est dire – ce principe de disquotation est formulé dans la célèbre "Convention **T**" du logicien polonais Alfred Tarski :

(T) "p" est vrai si et seulement si p

À la gauche de cette équivalence matérielle on trouve une phrase du métalangage, à sa droite une phrase du langage-objet. Nous reviendrons sur ce principe important et la définition que Tarski a donné d'un prédicat de vérité pour un langage-objet dans la sct. 15.1 du ch. 15.

La décision de me servir du français pour les trois langages différents est arbitraire : je peux tout autant choisir l'allemand pour le langage-objet, l'anglais pour le métalangage et réserver le français au méta-métalangage. On aurait alors :

(3a') Paris ist eine schöne Stadt.

(3b') "Paris" is my favourite word.

(3c') " "Paris" is my favourite word." est une phrase bien formée du métalangage.

Etant donné que (**3a**) est une phrase bien formée du français, (**3a'**) est une phrase bien formée de l'allemand. (**3b'**) est une phrase qui appartient à l'anglais et ne contient pas de mot allemand (puisque le mot ""Paris"" appartient à l'anglais). Finalement, (**3c'**) est entièrement une phrase du français, comme l'est (**3c**).

Nous nous servons d'un métalangage pour donner des traductions :

(**3f**) En allemand, l'expression "Paris" est utilisée pour désigner la ville de Paris.

(**3f**) est une phrase du français dans laquelle on mentionne le mot allemand "Paris". Des clauses comme (**3f**) peuvent aussi nous servir à spécifier les conditions de vérité d'une phrase :

(**3g**) "Paris ist eine schöne Stadt" est vraie si et seulement si Paris est une jolie ville.

Les conditions de vérité de la phrase "Paris ist eine schöne Stadt", spécifiées dans (**3g**), nous donnent la signification de cette phrase. On utilise donc le métalangage (le français, dans ce cas), pour relier les mots d'un langage-objet (ici l'allemand) avec leurs significations.

L'importance de la distinction entre langage-objet et métalangage apparaît si on revient sur la distinction entre vérité et validité. Nous disions qu'on ne peut pas dire d'un argument qu'il est vrai ou qu'il est faux, mais qu'il est valide ou ne l'est pas.[2] Mais alors *cela même* peut être vrai ou faux, c'est-à-dire qu'il peut être vrai que tel et tel argument est valide. Cette dernière phrase, cependant, est une affirmation dans le métalangage ou plus précisément dans le métalangage relatif au langage qui contient "cet argument est valide". Si nous remplaçons "cet argument" par un autre nom de l'argument dont nous voulons parler, par exemple par ""Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage"", nous voyons que "cet argument est valide", à son tour, appartient à un métalangage par rapport au langage dont nous nous servons pour parler du bonheur engendré par la logique. Le prédicat "... est valide", comme le prédicat "... est vrai", s'applique à des expressions linguistiques ; il faut les composer avec les *noms* de ces expressions pour faire une phrase bien formée.

(**3a"**) Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage.

(**3b"**) "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage" est valide.

(**3c"**) " "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage" est valide." est vrai.

La nécessité d'avoir des noms d'expressions pour former des phrases bien formées n'a plus lieu d'être si on transforme des prédicats comme "... est vrai" et "... est valide" en des opérateurs propositionnels (des expressions qui prennent des phrases pour former des phrases) comme "il est vrai que ..." et "étant donné que ..., il s'ensuit de $\cdots$". Mais ces expressions appartiennent aussi au métalangage puisqu'elles nous servent à parler des expressions (phrases, phrases). Au lieu de (**3c"**), on peut donc aussi dire :

(**3c"'**) Il est vrai que "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage" est valide.

(**3c"'**), comme (**3c"**), appartient au métalangage par rapport à (**3b"**). Au lieu de (**3b"**), nous pouvons utiliser l'opérateur propositionnel binaire "étant donné que ..., il s'ensuit de $\cdots$" (un opérateur qui prend deux phrases pour en faire une troisième) :

[2] Ce phénomène s'insère dans un cadre général : L'attribution de vérité ou de fausseté n'est pas la seule façon d'exprimer qu'une expression linguistique est correcte ou "bonne". Il y en a beaucoup d'autres. Une question ne peut être ni vraie ni fausse, mais elle peut être appropriée, intéressante, bonne etc. De même, un ordre n'est ni vrai ni faux, mais peut être justifié etc.

(3b''') Étant donné que si j'étudie la logique, je serai heureux et sage, et que j'étudie la logique, il s'ensuit que je serai heureux et sage.

Il est essentiel de ne pas confondre cette relation de "étant donné que ..., il s'ensuit que $\cdots$" avec la relation de "si ... alors $\cdots$". "Si ... alors $\cdots$" est une expression qui appartient au langage-objet : elle prend (*utilise*) deux phrases pour en faire une troisième. "Étant donné que ..., il s'ensuit que $\cdots$", au contraire, appartient au métalangage et nous sert à dire (en *mentionnant* les phrases) qu'il y a une relation de *conséquence logique* entre deux phrases, que l'une s'ensuit de l'autre. Nous abrégeons la relation exprimée par "étant donné que ..., il s'ensuit que $\cdots$" par un nouveau signe, "$\models$".

D'autres relations 'objectuelles' ont des correspondantes 'métalinguistiques'. Nous utilisons la flèche 'simple' "$\rightarrow$" pour la relation exprimée par "si ... alors $\cdots$" et nous utilisons la flèche longue et 'épaisse' "$\Longrightarrow$" pour une relation de conséquence métalinguistique (non-spécifiée). en lieu et place de :

(3h) "Si p alors q" est vrai ssi si "p" est vrai alors "q" l'est aussi.

nous pourrons donc maintenant dire

(3h') "$p \rightarrow q$" est vrai $\iff$ $p \Longrightarrow q$

Il ne s'agit pas ici d'un nouveau formalisme, mais d'abréger de manière semi-formelle des locutions du langage ordinaire, qui, tout au long de ce cours, nous servent de métalangage pour parler de notre langage-objet $\mathcal{L}$, le langage de la logique propositionnelle.

Nous pouvons faire une distinction similaire pour d'autres connecteurs propositionnels. "$\wedge$", on l'a vu, exprime la relation de conjonction – ce connecteur fait partie du langage-objet dont nous étudions le comportement logique. Nous utilisons un autre connecteur, "&", pour parler *de* ce langage-objet. "&" appartient par conséquent au métalangage. De même pour notre négation du langage-objet, "$\neg$", qui correspond, au métalangage, à "$\sim$" et pour "$||$", qui correspond à "$\vee$". Nous obtenons :

$$
\begin{array}{rcl}
\text{“}\neg p\text{” est vrai} & \Longleftrightarrow & \sim p \\
\text{“}p \wedge q\text{” est vrai} & \Longleftrightarrow & p \,\&\, q \\
\text{“}p \vee q\text{” est vrai} & \Longleftrightarrow & p \,||\, q \\
\text{“}p \rightarrow q\text{” est vrai} & \Longleftrightarrow & p \Longrightarrow q \\
\text{“}p \leftrightarrow q\text{” est vrai} & \Longleftrightarrow & p \iff q
\end{array}
$$

Nous voyons maintenant que la crainte d'un cercle vicieux n'était pas justifiée : il y a peut-être un cercle epistémique dans le sens que quelqu'un qui ne comprend pas ce qu'est la négation (ne possède pas le concept de négation) ne pourrait peut-être ni comprendre "$\neg$" ni "$\sim$".

Mais il n'y a pas de cercle vicieux logique : l'explication que nous avons donnée de la signification de la négation "$\neg$" ne contenait pas le signe "$\neg$" qu'on était en train d'expliquer (ce qui constituerait en fait un cas de cercle vicieux). Nous expliquons cela en exploitant notre compétence dans un langage différent – du français qui nous sert de métalangage – qui pourrait lui-même, si on en avait besoin, être formalisé et équipé d'une sémantique rigoureuse (comme nous l'avons fait avec le langage-objet, le langage de la logique des phrases).[3]

[3] Il y aura une étape dans la régression du langage objet au méta-langage au méta-méta-langages (et ainsi de suite) où nous retomberons dans le langage ordinaire. Mais ceci ne signifie pas qu'il s'agit d'un cercle vicieux. Le fait que l'on puisse toujours continuer à demander "pourquoi ?" ne signifie pas qu'il n'y a pas d'explications (entièrement) suffisantes et acceptables.

3.2 La validité et la vérité logique

Supposons qu'une inférence logique ait la forme suivante :

(3i) p. Et q. Mais aussi r. Donc s.

Nous avons vu qu'on peut mettre cette inférence dans la forme suivante :

(3i′)
$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \hline s \end{array}$$

Étant donné la sémantique du connecteur "$\wedge$" ("et"), on peut également l'écrire comme suit :

(3i″) $$\frac{p \wedge q \wedge r}{s}$$

Nous avons dit qu'en affirmant qu'un argument de la forme (3i′) ou (3i″) est valide, on mentionne les phrases "p", "q", "r" et "s" mais on ne les utilise pas. Dire qu'un argument de cette forme est valide revient à dire que

(3j) Si "p", "q" et "r" sont vrais, alors "s" l'est également.

Il s'agit ici d'une affirmation dans le métalangage : on n'utilise pas les phrases "p", "q" et "r" (rappelons qu'il s'agit d'abréviations pour des phrases comme "J'étudie la logique", "il pleut", "Dieu est omnipotent" – on ne parle pas des études, du temps ou de Dieu), mais on les mentionne – on parle de ces phrases et on dit qu'elles se trouvent dans une certaine relation de *conséquence logique*. C'est cette relation de conséquence logique qui rend les inférences valides.

Une inférence est valide si et seulement s'il n'est pas logiquement possible que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse – autrement dit, s'il n'y a pas d'interprétation qui interprète les prémisses comme étant toutes vraies et la conclusion comme étant fausse. Une inférence de la forme (3i″) est valide si et seulement si la conséquence, "s", est une conséquence logique des prémisses "p", "q" et "r". C'est dans ces cas-là que l'implication matérielle 'correspondante' ("$(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$") est une tautologie. L'implication matérielle 'correspondante' est l'implication qui a la conjonction des prémisses comme antécédent et la conclusion comme conséquent.

Si, par exemple, nous voulons savoir si l'inférence

(3k) $$\frac{p \rightarrow \neg p}{\neg p}$$

est valide (cf. p. 27 et 39), il faut voir s'il est possible que la prémisse "$p \rightarrow \neg p$" soit vraie et qu'en même temps la conclusion "$\neg p$" soit fausse. Nous en faisons donc les tables de vérité :

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	V

p	$\neg p$
V	F
F	V

Nous observons qu'il n'y a pas de ligne dans le premier tableau (à gauche) qui contient un "V" et dont la ligne correspondante dans le deuxième tableau (à droite) contient un "F". Nous pouvons également vérifier la validité de l'argument en faisant la table de vérité de l'implication matérielle.

p	$\neg p$	$p \to \neg p$	$(p \to \neg p) \to \neg p$
V	F	F	V
F	V	V	V

Nous pouvons donc dire : Un argument est valide si et seulement si sa conclusion est une conséquence logique de ses prémisses. Pour ça, il est suffisant et nécessaire que l'implication matérielle soit une tautologie. Nous avons donc la relation suivante : une phrase "q" est une conséquence logique ("$\models$") d'une autre ("p") si et seulement si l'implication 'correspondante' est une vérité logique :

$$p \models q \qquad \Longleftrightarrow \qquad \models p \to q$$

On parle alors d'"implication formelle" :

implication matérielle de q par p ("p seulement si q")	$\Longleftrightarrow$	"$p \to q$" est vrai (soit "p" est faux soit "q" est vrai)
implication formelle de q par p ("q" est une conséquence de "p")	$\Longleftrightarrow$	"$p \to q$" est une tautologie (il n'est pas logiquement possible que "p" soit vrai et "q" faux.)

La distinction 'matériel'/'formel' correspond à la distinction entre langage-objet et métalangage.[4] Lorsque je dis que si p, alors q, j'utilise les phrases "p" et "q" ; lorsque je dis que "q" est une conséquence logique de "p", que l'argument "p ; donc q" est valide ou que "$p \to q$" est une tautologie, j'utilise des noms pour ces phrases (ces noms sont des expressions de la forme $\langle$ guillemets, la phrase concernée, guillemets $\rangle$) et je dis que ces phrases se trouvent en relation de conséquence logique.

Cette relation de conséquence logique est une relation sémantique puisqu'elle subsiste entre des phrases en vertu de leurs significations (qui nous sont données par les tables de vérité). C'est pour cette raison qu'on parle aussi de *"conséquence sémantique"*, pour distinguer cette relation de la relation de déductibilité qui est parfois appelée "conséquence syntaxique" (et dont on parlera plus tard dans la sct. 4.1).

Nous pouvons maintenant introduire une abréviation spécifique pour dire qu'un argument est valide :

$$\text{“Un argument de la forme } \frac{p \wedge q \wedge r}{s} \text{ est valide.”} \quad \rightsquigarrow \quad \text{“}\{p \wedge q \wedge r\} \models s\text{”}$$

$$\text{“Un argument de la forme } \frac{\begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix}}{s} \text{ est valide.”} \quad \rightsquigarrow \quad \text{“}\{p, q, r\} \models s\text{”}$$

Dans le cas où on n'a qu'une seule prémisse (par ex. une conjonction, comme dans le premier exemple précédent), nous pouvons omettre les crochets "{" et "}" : on écrira seulement "$p \wedge q \wedge r \models s$". Ce nouveau signe "$\models$" n'est qu'une autre notation pour la flèche double : au lieu d'écrire "$p \wedge q \wedge r \Longrightarrow s$", on écrira "$p \wedge q \wedge r \models s$", au lieu de "$p \& q \& r \Longrightarrow s$" on écrira "$\{p, q, r\} \models s$".

On a remarqué que "$\models$", faisant partie du métalangage, peut tout de même être interprété comme un opérateur propositionnel. Au lieu de le lire comme "... est une conséquence sémantique de $\cdots$" – expression qui a besoin de deux *noms de phrases* pour former une phrase –, on peut aussi l'interpréter

[4] Cette terminologie vient de l'usage des adverbes latins "formaliter" et "materialiter" par les logiciens médiévaux pour marquer la distinction entre langage-objet et métalangage. Ils parlaient également d'un "mode matériel" de l'usage des mots (pour dire que ces mots étaient utilisés) et d'un "mode formel" de leur usage (pour dire qu'ils étaient mentionnés).

comme "Il s'ensuit de la proposition que ... que $\cdots$" ou "Étant donné que ..., il s'ensuit que $\cdots$", qui sont des expressions qui ont besoin de deux *phrases* pour former une phrase – mais qui appartiennent néanmoins au métalangage.[5] Interprétant "$\models$" de cette manière, nous pouvons nous passer des guillemets et écrire :

(1) $p \models q$

(1) désigne le résultat de la juxtaposition de l'expression "Il s'ensuit de la proposition que", de la phrase représentée par "p", de l'expression "que" et la phrase représentée par "q". Si "p" représente "Anne est amoureuse de Jean" et que "q" représente "Anne est amoureuse de quelqu'un", alors (1) devient la phrase suivante :

(2) Il s'ensuit de la proposition qu'Anne est amoureuse de Jean que
Anne est amoureuse de quelqu'un.

Même si cette abréviation "$\models$" est communément utilisée et utile, elle entraîne une certaine confusion entre usage et mention. Étant donné qu'on se trouve dans le métalangage, une meilleure manière de dire que "q" est une conséquence sémantique de "p", serait la suivante :

(3) "p" $\models$ "q"

Dans (3), les phrases "p" et "q" sont mentionnées et "$\models$" est utilisé pour signifier la relation de conséquence sémantique ("$\models$" est lu comme : "a comme conséquence (sémantique)" ou "implique formellement"). (3) rend explicite le fait que la relation de conséquence représentée par "$\models$" appartient au métalangage et non pas au langage-objet.

Néanmoins, (3) pose un problème subtil. En logique, on l'a vu, on n'a pas seulement affaire à des arguments concrets, formulés dans le langage ordinaire (le français), mais à des schémas ou des squelettes d'arguments : on étudie la *forme* des arguments. Un argument n'est considéré comme valide que si tous les autres arguments ayant la même forme le sont aussi. On a essayé de représenter cet aspect de généralité en remplaçant les phrases concrètes ("j'étudie la logique", "je serai heureux et sage" etc.) par des lettres appelés "schématiques" ("p", "q" etc.) – et on a vu que les lettres qui substituaient ces phrases ordinaires étaient arbitraires. Cependant, cela pose problème au niveau du métalangage.

Le problème vient du fait que l'on veut dire, par une assertion de la forme "$p \models q$" que, quelles que soient les phrases substituées pour "p" et "q" dans "$p \models q$", la phrase qui en résulte est vraie. Malheureusement, la phrase ""p" $\models$ "q"" n'affirme pas cela – dans cette phrase, les noms de phrases ""p"" et ""q"" ne désignent que des phrases précises. Afin de mieux comprendre ce problème, nous pouvons penser à la la situation suivante : supposons que nous introduisions un nom 'variable' ou 'schématique', "Legrand", pour désigner la personne la plus grande dans la salle. On peut alors l'utiliser dans des phrases telles que "Legrand fait plus de 2 mètres", "Parmi nous, Legrand est celui qui voit le mieux au cinéma" etc., désignant à chaque fois, quelle que soit la personne la plus grande dans la salle (supposons qu'on ne le sache pas), celle qui sera plus grande que 2 mètres, privilégiée au cinéma etc. Même si nous parvenons, à l'aide de "Legrand", à avoir un 'nom variable' pour une personne, cela ne signifie pas que le *nom* lui-même est variable, mais seulement que la personne qu'il désigne se modifie suivant la composition de la salle dans laquelle nous nous trouvons : dans une autre salle, il désignera une autre personne. Mais cela ne veut pas dire que le nom change : il restera vrai, par exemple, que

[5] Il ne faut pas penser que toute expression appartenant au métalangage opère sur des noms d'expressions. L'opérateur "il est vrai que ...", l'exemple paradigmatique d'une expression du métalangage, a besoin d'une phrase (et non pas d'un nom d'une phrase) pour en former une phrase plus complexe.

"Legrand" est un nom composé de sept lettres, que nous avons inventé etc., même si la personne désignée par "Legrand" s'appelle "Otto" à une occasion et "Jean-Marc" à une autre. Il n'est pas vrai que la phrase ""Legrand" est composée de quatre lettres" devienne vraie si "Legrand" désigne quelqu'un qui s'appelle "Otto". La variabilité que "Legrand" possède dans le langage-objet est donc perdue au niveau du métalangage : même si "p" et "q" désignent des phrases arbitraires, leurs noms ne désignent pas des phrases arbitraires.

3.3 La quasi-citation

Pour échapper à ce problème, il faut introduire des noms pour des phrases dans notre langage objet. Nous introduisons des lettres minuscules grecques "ϕ" (prononciation : "phi"), "ψ" ("psi"), "χ" ("chi") et "ξ" ("xi") pour parler des phrases de n'importe quelle complexité. "ϕ" est donc le nom d'un nom d'une proposition – ϕ est soit "p", soit "q", soit "$p \wedge q$" ou encore "$(p \rightarrow q) \wedge r$". Il y a donc une différence cruciale entre les lettres romaines et grecques : les lettres romaines nous servent comme ***abréviations*** des phrases. Nous pouvons, par exemple, remplacer toute occurrence de "p" par la phrase "Sam veut se marier" et toute occurrence de "q" par "Marie a faim". Les lettres grecques, au contraire, sont des ***noms*** de phrases : nous pouvons, si nous voulons, remplacer "ϕ" par ""Marie a faim."" et "ψ" par ""Sam veut se marier"". Si ϕ est un nom pour "Marie a faim" et ψ est un nom pour "Sam veut se marier", nous pouvons donc dire :

- "Marie" fait partie de ϕ.
- ψ consiste en quatre mots.

En bref, "ϕ" et "ψ" ne sont pas des abréviations de phrases, mais des abréviations de noms de phrases. Au lieu de (3), nous dirons donc :

(4) $\phi \models \psi$

Néanmoins, nous n'avons pas seulement besoin de noms pour des phrases, mais aussi pour les propositions d'un certain type. Par exemple, nous voudrions dire que toute proposition conjonctive a comme conséquence sémantique chacun de ses conjoints. Jusqu'à maintenant, on s'est servi d'expressions comme "toute proposition ayant la même forme que "$p \wedge q$"", "le résultat de l'addition de phrases au connecteur "... $\rightarrow \cdots$"" etc. Mais ceci ne nous aide pas à exprimer qu'une conjonction implique formellement ses conjoints. Si nous disions

(5) $\phi \wedge \psi \models \phi$

nous ne pourrions plus substituer "ϕ" par ""Sam a faim"" et "ψ" par ""Marie veut se marier"" car dans ce cas-là nous aurions :

(6) "Sam a faim" $\wedge$ "Marie veut se marier" $\models$ "Sam a faim"

(6) est un non-sens, car "$\wedge$" relie des phrases et non pas des noms de phrases. Essayons la chose suivante :

(7) "$\phi \wedge \psi$" $\models \phi$

Le problème avec (7), comme avec (3), est que nous avons perdu la généralité. "$\phi \wedge \psi$" n'est un nom que pour cette expression précise (la lettre grecque "ϕ", suivie de "$\wedge$" et de la lettre grecque "ψ"). Au contraire, nous en avons besoin de manière à mentionner une proposition (arbitraire) qui a une certaine forme (non-arbitraire).

A ce propos, Quine a introduit ce que nous appelerons la "quasi-citation", qui se fait avec des demi-crochets, appelés "demi-crochets de Quine" ("Quine corners"). Nous stipulons simplement que l'expression

(8) $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$

désignera la formule qui commence avec ϕ (c'est-à-dire la proposition arbitraire dénotée par "ϕ"), continue avec "$\wedge$" et finit par ψ. (8) nous permet de parler de toutes les expressions de n'importe quelle complexité, ayant une certaine forme (en l'occurrence, une forme conjonctive). De la même manière, $\ulcorner(\mu)\urcorner$ dénote le résultat de la mise entre parenthèses de l'expression μ.

En général, des matrices comme par ex."$\ulcorner \ldots \wedge \cdots \urcorner$", "$\ulcorner(\ldots)\urcorner$" etc. nous servent à construire des noms complexes, comme le font par exemple "le père de ..." ou "la moitié de ...". Si Sam est une personne, alors "le père de Sam" dénote le père de cette personne. Si a est un certain nombre, alors "la moitié de a" dénote la moitié de ce nombre.[6] Si ϕ est une certaine phrase, alors $\ulcorner(\phi)\urcorner$ dénote le résultat de la mise entre parenthèses de cette phrase. Si ϕ est "Sam est triste", alors $\ulcorner(\phi)\urcorner$ est l'expression "(Sam est triste)". Si ϕ est "Sam a faim" et ψ est "Marie veut se marier", alors $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ devient "Sam a faim et Marie veut se marier" (le nom de la proposition conjonctive). Nous pouvons, bien sûr, substituer ϕ par "p" et ψ par "q", obtenant alors à partir de (8) l'expression suivante :

(9) "$p \wedge q$"

(9) est un nom de la conjonction des deux phrases simples. Nous pouvons concevoir (8) comme le nom d'une proposition contenant des lacunes "... $\wedge \cdots$", où la première lacune (représentée par les points de suspension "$\ldots$") est remplie par l'expression ϕ et la deuxième lacune (représentée par "$\cdots$") est remplie par ψ. L'avantage d'avoir des noms pour des phrases non-spécifiées est que ϕ et ψ peuvent être de n'importe quelle complexité : dans (8), nous pouvons aussi substituer ϕ par "$p \rightarrow q$" et ψ par "$(p \vee q) \wedge r$". L'avantage des demi-crochets ne concerne que les noms complexes : en l'absence de connecteurs, les demi-crochets n'ont pas d'effet. $\ulcorner \phi \urcorner$ est simplement ϕ.

C'est avec ces demi-crochets que nous parvenons finalement à une formulation satisfaisante de (5) :

(10) $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner \models \phi$

L'expression (10) désigne le résultat de la juxtaposition de l'expression "Étant donné la proposition que", de la phrase *désignée* par ϕ, du connecteur "$\wedge$", de la phrase *désignée* par ψ, de l'expression "il s'ensuit que" et de la phrase *désignée* par ϕ. Si ϕ désigne "Sam a faim" et ψ désigne "Marie veut se marier", alors (10) devient la phrase suivante :

(11) Étant donné que Sam a faim et que Marie veut se marier, il s'ensuit que Sam a faim.

C'est cet usage que nous adopterons par la suite.

3.4 Les tautologies et les contradictions

Une inférence logique est valide si et seulement s'il n'est pas logiquement possible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse, c'est-à-dire si toute interprétation de ses constituants simples

[6] Nous retournerons, dans la sct. 8.6 du ch. 8, à ces noms complexes qu'on appellera "fonctions".

qui rend vraies les prémisses rend également vraie la conclusion. Étant donné la signification de l'implication matérielle "$\rightarrow$" – qu'elle est vraie s'il n'est pas le cas que l'antécédent est vrai et le conséquent faux – une inférence qui a "p" comme prémisse et "q" comme conclusion est valide si et seulement si "$p \rightarrow q$" est une tautologie.

Une proposition est une tautologie si et seulement si elle est vraie dans toutes les possibilités logiques, c'est-à-dire vraie sous toutes les interprétations de ses constituants simples. C'est pour cette raison que les tautologies sont appelées *"vérités logiques"*. La négation d'une tautologie, étant donné la signification de "$\neg$", est une proposition fausse dans toutes les possibilités logiques – il n'y a aucune interprétation de ses constituants simples qui la rende vraie. On appelle ces faussetés logiques des *"contradictions"*.[7]

Il s'ensuit que les tautologies et les contradictions jouent un rôle particulier dans les inférences : une tautologie, puisqu'elle ne peut pas être fausse, peut être inférée de n'importe quelle prémisse. Quelques soient les prémisses dont on infère la tautologie, il n'est pas logiquement possible que ces prémisses soient vraies *et* la tautologie fausse. Une tautologie peut même être inférée d'un ensemble vide de prémisses. Une contradiction, au contraire, est une prémisse dont on peut inférer n'importe quelle conclusion. Quelle que soit la conclusion qu'on veut en tirer, il n'est pas logiquement possible que la prémisse (la contradiction) soit vraie et que la conclusion soit fausse.

Une tautologie paradigmatique est la proposition "$p \vee \neg p$".[8] "$p \wedge \neg p$" est une contradiction exemplaire. Selon les considérations précédentes, on voit que les inférences

$$\frac{q}{p \vee \neg p} \qquad \frac{p \wedge \neg p}{q}$$

sont valides, quelle que soit la proposition désignée par "q" : on peut inférer une tautologie de n'importe quelle proposition et on peut inférer n'importe quelle proposition d'une contradiction. Puisqu'une tautologie s'ensuit de n'importe quelle prémisse, on peut dire de la manière suivante que "$p \vee \neg p$" est une tautologie :

$$\models p \vee \neg p$$

Ceci s'accorde avec notre explication de la conséquence logique : "$\phi \models \psi$" est vraie si et seulement s'il est vrai pour n'impote quels ϕ et ψ que : si ϕ est vrai, alors ψ l'est aussi. S'il est impossible *tout court* que ψ soit faux, alors cette implication est vraie même si ϕ est faux. Pour dire que "$p \wedge \neg p$" est une contradiction, on peut affirmer :

$$\models \neg(p \wedge \neg p)$$

[7] Nous avons déjà rencontré les tautologies et les contradictions dans les colonnes 1 et 16 du tableau des 16 connecteurs binaires possibles (cf. p. 48). Elles correspondent à des "fonctions de vérité" ("truth-functions") dans le même sens qu'une fonction constante peut être appelée "une fonction". Rien ne nous empêche d'introduire des 'connecteurs' "$\top$" et "$\perp$" avec les tables de vérité suivantes :

p	q	$p \top q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \perp q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Comme les valeurs de vérité de "$p \top q$" et de "$p \perp q$" ne dépendent pas des valeurs de vérité de "p" et de "q", une telle stipulation a peu d'intérêt.

[8] Comparez cette phrase avec "Toute proposition $\ulcorner \phi \vee \neg \phi \urcorner$ est une tautologie." Dans "Une tautologie paradigmatique est la proposition "$p \vee \neg p$" ", on parle d'une phrase précise, par exemple de "il pleut ou il ne pleut pas". Dans "Toute proposition $\ulcorner \phi \vee \neg \phi \urcorner$ est une tautologie" on parle de toutes les phrases qui ont une certaine forme, c'est-à-dire de celles qui sont composées d'une proposition simple, d'une expression pour la disjonction et de la négation de cette proposition simple. C'est la raison pour laquelle on utilise les demi-crochets de Quine dans ce cas.

Si deux phrases complexes ont la même table de vérité, il n'y a aucune raison logique de les distinguer : en ce qui concerne la logique, elles disent la même chose. Entre les deux, il s'agit d'*équivalence sémantique*. La relation entre la notion d'"équivalence sémantique" du métalangage et l'équivalence matérielle du langage-objet est la même que celle entre la notion de "conséquence sémantique" et l'implication matérielle. Dire que $p \rightarrow q$, revient à dire qu'il n'est pas le cas que "p" est vraie et "q" fausse. Dire que ψ est une conséquence sémantique de ϕ revient à dire qu'il n'y a aucun cas (aucune possibilité logique) où ϕ est vraie et ψ fausse. Dire que $p \leftrightarrow q$, revient à dire que les deux phrases "p" et "q" sont soit les deux vraies soit les deux fausses. Dire que ϕ est sémantiquement équivalente à ψ, finalement, revient à dire qu'elles reçoivent les mêmes valeurs de vérité dans tous les cas possibles, c'est-à-dire que leurs tables de vérité sont les mêmes.[9]

On dit souvent d'une contradiction qu'elle est contradictoire avec elle-même ou qu'elle se contredit elle-même. Nous avons ici une relation du même niveau que la conséquence sémantique : la relation de contradiction appartient aussi au métalangage. Deux phrases sont *contradictoires* si elles ne peuvent pas être vraies ensemble et ne peuvent pas être fausses ensemble ; une seule d'entre elles doit être vraie, puisque la vérité de la première entraîne la fausseté de la deuxième et la fausseté de la deuxième entraîne la vérité de la première.[10]

Le dernier conjoint est important : être contradictoire n'est pas la seule manière d'être incompatible pour des phrases. Comparons les deux paires de phrases suivantes :

(3l) "La logique me rend heureuse." et "La logique ne me rend pas heureuse."

(3m) "La logique me rend heureuse." et "La logique me rend malheureuse."

Dans les deux cas, il est impossible que les deux phrases soient vraies (en même temps, pour la même personne). Mais il y a une différence :

1. Dans le premier cas (**3l**), on peut conclure la vérité de la deuxième proposition par la fausseté de la première.
2. Dans le deuxième cas (**3m**), on ne le peut pas : les deux phrases pourraient être fausses, par exemple dans le cas où la logique me laisse indifférente.

Les phrases de la première paire ne peuvent ni être vraies ensemble ni être fausses ensemble ; les phrases de la deuxième paire ne peuvent pas être vraies ensemble, mais elles peuvent être fausses ensemble. Si deux phrases sont reliées de la même manière que la première paire, c'est-à-dire de telle manière qu'on puisse conclure la vérité de l'une par la fausseté de l'autre *et* la fausseté de l'autre par la vérité de la première, on les appelle *"contradictoires"*. Si les deux phrases sont reliées de la même manière que la deuxième paire, c'est-à-dire de telle manière qu'on ne puisse conclure que la fausseté de l'une à partir de la vérité de l'autre (et donc la fausseté de la deuxième à partir de la vérité de la première) mais pas nécessairement l'inverse, on les appelle *"contraires"*. D'autres exemples de phrases contraires (mais pas contradictoires) sont les paires suivantes :

(3n) "Mon livre est (uniformément) rouge.", "Mon livre est (uniformément) bleu."

---

[9] C'est cette notion d'"équivalence sémantique" qui nous permet de dire que "$p \vee \neg p$" est la *seule* tautologie, et que "$p \wedge \neg p$" est la *seule* contradiction. On y arrive par des transformations de formules. Considérons une tautologie 'complexe', comme "$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)) \leftrightarrow \neg p$". Puisqu'il s'agit d'une tautologie, elle est vraie dans les quatre manières différentes d'attribuer des "V" et des "F" à "p" et "q". Elle est donc équivalente à "$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$", formule qui combine (par la disjonction) les quatre interprétations possibles de "p" et de "q". En appliquant une des 'lois de distribution' ($\ulcorner(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))\urcorner$), on obtient "$(p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q))$". Puisque les conjoints tautologiques "$(q \vee \neg q)$" n'attribuent rien aux conditions de vérité de la disjonction, on peut les omettre, et ainsi arriver à "$p \vee \neg p$".

[10] J'utilise "entraîne" ici pour désigner la relation de conséquence sémantique, désignée par "$\models$".

(3o) "Je suis à Genève.", "Je suis à Paris."

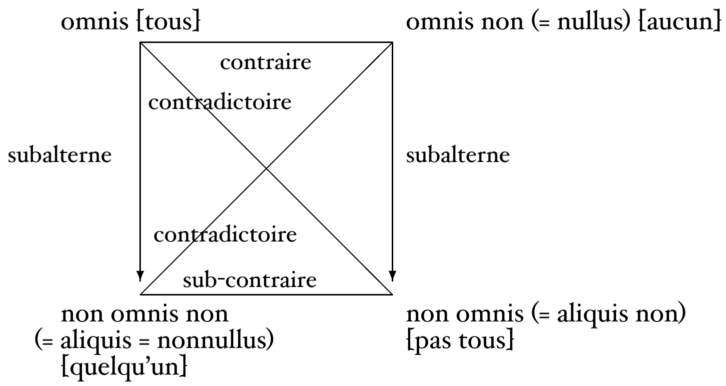
(3p) "Benjamin est célibataire.", "Benjamin est marié."

Mon livre pourrait avoir d'autres couleurs que le rouge et le bleu ; je pourrais être à Lyon et Benjamin est peut-être un enfant de trois ans. On voit ici qu'il faut distinguer la possibilité et l'impossibilité *logique* d'autres formes de possibilités et d'impossibilités. Le fait que deux phrases ne puissent pas être vraies ensemble (qu'elles sont contraires) peut avoir différentes raisons : le monde (3n), la métaphysique (3o), la langue (3p) etc.

Mis à part les relations de contradiction et de contrariété, la tradition a reconnu un troisième type d'opposition qui est la relation de *sub-contrariété*. Deux phrases sont sub-contraires si et seulement s'il n'est pas possible que les deux soient fausses ensemble, même s'il est possible qu'elles soient vraies ensemble. Les deux phrases "il y a une fête gratuite" et "il y a une fête qui n'est pas gratuite", par exemple, peuvent être vraies ensemble (s'il y a et des fêtes gratuites et des fêtes payantes), mais elles ne peuvent pas être fausses ensemble : il n'est pas possible que "il y a une fête gratuite" soit fausse (et donc qu'il n'y ait que des fêtes payantes) et que "il y a une fête qui n'est pas gratuite" soit aussi fausse (et donc qu'il n'y ait pas de fêtes qui ne sont pas gratuites).[11]

3.5 Le carré des oppositions

Une manière de présenter les relations sémantiques parmi des phrases est ce qu'on appelle un "carré des oppositions". Le plus ancien de ces carrés, lié au nom d'Appulée (né +/- en 125 av. J.C.) se fait dans la logique syllogistique comme suit :[12]



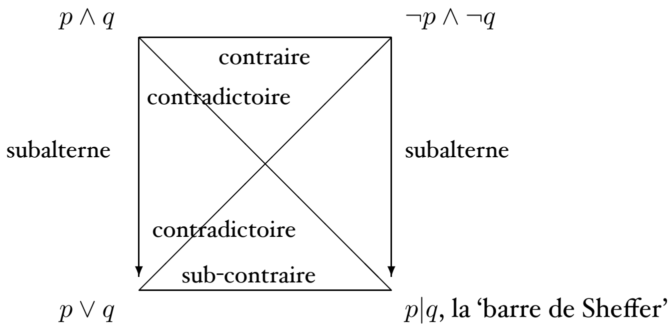
La relation de contradiction qui tire des diagonales entre les coins de ce carré signifie que l'un est la négation de l'autre. Les phrases contraires, cependant, se distinguent par une négation interne : elles ne peuvent pas toutes deux être vraies, mais elles peuvent toutes deux être fausses : il n'est pas possible que toutes les choses soient F et que toutes les choses ne soient pas F (au moins s'il n'est pas le cas qu'il n'y ait rien du tout), mais il est possible qu'il y ait des F (et que donc "toutes les choses ne sont pas F" soit faux) et des non-F (et que donc "toutes les choses sont F" soit également faux). La relation de subalternation est la relation de conséquence sémantique : si toutes les choses sont F (et s'il y a quelque chose), alors il n'est pas vrai que toutes les choses ne sont pas F ; si toutes les choses ne sont pas F (et s'il y a des choses qui peuvent être F), alors il n'est pas le cas que toutes les choses sont F. La sub-contrariété correspond à la vérité logique (= validité) de la disjonction. S'il y a des choses et que

[11] Il faut présupposer, pour pouvoir montrer que les deux phrases ne peuvent pas être fausses ensemble, qu'il y ait des fêtes. Ceci correspond à la présupposition que le 'domaine de quantification' ne soit pas vide. On reviendra sur ces problèmes à la page p. 182 dans la leçon 9.

[12] Nous reviendrons sur ce carré dans le contexte de la logique des prédicats, à la p. 144 dans le chapitre 8.

nous en choisissons une appelée "a", alors soit a est F, soit a n'est pas F. Si a est F, alors il n'est pas vrai que toutes les choses ne sont pas F ; si a n'est pas F, alors il n'est pas vrai que toutes les choses sont F. Alors au moins une des deux phrases préfixées par "non omnis non" et par "non omnis" est vraie. La contrariété veut dire "pas les deux vraies"; la sub-contrariété dit "pas les deux fausses".

On peut adapter le carré des oppositions d'Appulée à la logique propositionnelle comme suit :



p	q	$p\|q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

On vérifie ce carré d'oppositions à l'aide des tables de vérité :

Contrariété : il n'y a pas d'interprétation qui rende "$p \wedge q$" et "$\neg p \wedge \neg q$" vraies.

Sub-contrariété : il n'y a pas d'interprétation qui rende "$p \vee q$" et "$p|q$" fausses.

Subalternation : toute interprétation qui rend "$p \wedge q$" vraie, rend "$p \vee q$" vraie.

Subalternation : toute interprétation qui rend "$\neg p \wedge \neg q$" vraie, rend "$p|q$" vraie.

Contradiction : une interprétation rend "$p \wedge q$" vraie si et seulement si elle rend "$p|q$" fausse.

Contradiction : une interprétation rend "$p \vee q$" vraie ssi elle rend "$\neg p \wedge \neg q$" fausse.

Les cinq relations sémantiques entre phrases correspondent au caractère tautologique d'une certaine proposition complexe :

ψ est une conséquence sémantique de ϕ	ψ vraie si ϕ est vraie	$\ulcorner \phi \rightarrow \neg\psi \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont sémantiquement équivalentes	vraies ou fausses ensembles	$\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont contradictoires	ni vraies ni fausses ensembles	$\ulcorner \neg(\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont contraires	pas vraies ensembles	$\ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont sub-contraires	pas fausses ensembles	$\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ tautologie

3.6 Implication vs. conséquence

La relation entre des phrases que nous venons de rebaptiser par le nom barbare de "subalternation" est la relation de conséquence (sémantique). Nous avons vu que "q" est une conséquence sémantique de "p" si et seulement si "$p \rightarrow q$" est une tautologie. "$\models$" appartient au métalangage et "$\rightarrow$" appartient au langage-objet.

L'importance d'une distinction entre les deux relations est illustrée par un paradoxe qu'a soulevé pour la première fois Lewis Carroll, l'auteur de *Alice au pays des merveilles*, dans un article de deux pages (Carroll 1895). Achille, le personnage de l'histoire, veut convaincre la tortue de la vérité de "q". Il produit alors un argument du type *Modus Ponens*, dont la tortue accepte la vérité des prémisses :

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q}$$

La tortue, cependant, réplique que cet argument est un *enthymème*, qu'il y manque une prémisse, à savoir que "q" s'ensuit de "p" et de "$p \rightarrow q$". En réponse, Achille est d'accord d'ajouter cela comme prémisse supplémentaire à l'inférence qui devient alors :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Mais la tortue n'est toujours pas convaincue que q. Elle est d'accord qu'il s'ensuit des trois prémisses – "$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$", "$p \rightarrow q$" et "$p$" – que q, mais elle insiste pour qu'on l'ajoute comme prémisse. Achille la lui accorde et se trouve donc dans ce qu'on appelle une "régression à l'infini"; il n'arrivera jamais à convaincre la tortue que q :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ (p \wedge p \rightarrow q) \rightarrow q \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \\ (p \wedge (p \rightarrow q) \wedge ((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)) \rightarrow q \\ \hline q \end{array} \qquad \ldots$$

La tortue a pu ridiculiser Achille grâce à l'absence de distinction entre la relation de conséquence sémantique, qui justifie la validité du schéma d'inférence qu'on appelle "modus ponens", et la relation d'implication matérielle.

Après l'avoir clairement distinguée de l'implication matérielle, nous pouvons maintenant noter plusieurs propriétés de la relation de conséquence sémantique qu'on a appelée "$\models$" :[13]

Nous remarquons, tout d'abord, que l'ordre des prémisses n'est pas pertinent pour évaluer un argument comme valide ou non valide :

(perm) $\{p_1, p_2, \ldots\ p_n\} \models r \quad \Longrightarrow \quad \{p_2, p_3, p_1, \ldots\ p_n, \ldots\ p_7, \ldots\} \models r$

i.e. ce n'est pas en changeant l'ordre des prémisses que l'on peut rendre un argument valide, non valide.

En second lieu, la validité est *monotone* :

(mon) $\{p_1, p_2, \ldots\ p_n\} \models r \quad \Longrightarrow \quad \{p_1, p_2, \ldots\ p_n, q_1, q_2, \ldots\ q_m\} \models r$

Si vous tenez un argument valide, votre interlocuteur ne peut pas vous contredire en acceptant l'argument tel qu'il est, mais plutôt en lui *ajoutant* une prémisse supplémentaire. (Dans le cas où l'on ajoute une prémisse qui contredit une prémisse déjà présente, "r" s'ensuit parce que n'importe quelle proposition est une conséquence sémantique d'une contradiction, c'est-à-dire par le schéma d'inférence appelé "ex falso quodlibet".)[14]

La validité est transitive :

(trans) $\{p_1, \ldots\ p_n\} \models r\ \&\ \{r, q_1, \ldots\ q_n\} \models s \Longrightarrow \{p_1, \ldots\ p_n, q_1, \ldots\ q_m\} \models s$

Si "r" s'ensuit des prémisses "p_1", "p_2", etc. et si "s" s'ensuit de cette prémisse intermédiaire "r" et des prémisses "q_1", "q_2", etc., alors on peut directement inférer "s" (sans avoir besoin d'inférer d'abord "r"

[13] Pour faciliter l'exposition, nous ne considérons ici que des arguments qui n'ont qu'un nombre fini de prémisses. Mais les propriétés de la validité en question valent aussi pour des arguments qui en ont un nombre infini.

[14] La règle d'inférence "ex falso quodlibet" correspond à la tautologie "$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$" dont nous parlerons à la p. 89.

de "p_1", "p_2" etc.).[15]

La validité est réflexive :

(refl) $\{p_1, p_2, \ldots p_n\} \models p_i$ (pour toute proposition $p_i \in \{p_1, p_2, \ldots\}$)

De "Tous les hommes sont mortels. Socrate est un homme", il s'ensuit que Socrate est mortel, mais également que tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme.[16]

3.7 L'interdéfinissabilité des connecteurs et d'autres équivalences sémantiques

Une implication matérielle telle que "$p \rightarrow q$" est vraie si et seulement si, soit "p" est faux, soit "q" est vrai. Nous pouvons formuler ses conditions de vérité en utilisant la disjonction : "$p \rightarrow q$" est vrai si et seulement si "$\neg p \vee q$" est vrai. Cette équivalence est une équivalence au niveau du métalangage : "$p \rightarrow q$" est une conséquence sémantique de "$\neg p \vee q$" et "$\neg p \vee q$" est une conséquence sémantique de "$p \rightarrow q$". En bref, leurs tables de vérité sont les mêmes. On parlera d'"*équivalence sémantique*".

Nous remarquons d'autres équivalences sémantiques. Deux paires d'équivalences importantes sont appelées "lois de Morgan", d'après Auguste De Morgan (1806–1871).[17] En voici une formulation préliminaire :

$$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$$

Il faut bien interpréter ces équivalences. L'utilisation de la flèche double "$\iff$" signifie qu'il s'agit d'assertions du métalangage. Bien que les équivalences matérielles "$(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$" et "$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$" soient également vraies, les lois de Morgan font une assertion plus forte, à savoir que ces équivalences matérielles sont non seulement vraies mais aussi tautologiques.

Les lois de Morgan sont parfaitement générales : elles ne signifient pas seulement, comme notre formulation le veut, que la table de vérité de la négation d'une conjonction de *phrases simples* est équivalente à la disjonction des négations de ces phrases simples, mais elles s'appliquent à toutes les phrases, complexes et simples. Si nous utilisons les lettres minuscules grecques pour signifier ces phrases d'une complexité arbitraire et les demi-crochets de Quine pour construire des noms de phrases ayant une certaine forme, on obtient la formulation correcte :

$$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner \iff \ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$$
$$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner \iff \ulcorner\neg\phi \wedge \neg\psi\urcorner$$

Ces deux équivalences sémantiques nous informent que nous pouvons, en toute généralité, remplacer une proposition $\ulcorner\neg(\phi\wedge\psi)\urcorner$ (c'est-à-dire toute négation d'une conjonction) par la proposition $\ulcorner\neg\phi\vee\neg\psi\urcorner$

[15] On obtient une formulation plus facilement reconnaissable comme celle d'un principe de transitivité si on assume qu'il n'y a pas de prémisses supplémentaires "q" et une seule prémisse initiale "p" : $p \models r \,\&\, r \models s \Longrightarrow p \models s$.

[16] Si l'ensemble des prémisses ne contient qu'un seul membre, on a une inférence triviale (mais valide !) : "Il pleut ; donc, il pleut." Ceci ne veut pas dire que la logique justifie le raisonnement circulaire : la logique ne nous montre pas qu'il pleut, mais qu'il pleut *s'il pleut*.

[17] D'après Łukasiewicz (1934), Guillaume d'Ockham les avait déjà reconnues.

(c'est-à-dire une disjonction de négations).[18] Les lois de Morgan nous permettent de 'pousser' des négations devant des conjonctions et des disjonctions à l'intérieur de ces formules, en échangeant le connecteur "$\wedge$" ou "$\vee$" avec son connecteur 'opposé' "$\vee$" ou "$\wedge$".

C'est grâce à cette généralité que les lois de Morgan nous permettent de *définir* "$\wedge$" à partir de "$\vee$" et de "$\neg$". Mais qu'est-ce qu'une définition ? Une définition, dans l'usage que nous en faisons ici, est une équivalence sémantique qui introduit une nouvelle expression. C'est grâce à l'équivalence sémantique que le *definiendum* (la nouvelle expression à définir) peut être substituée dans n'importe quel contexte au *definiens* (les expressions 'anciennes' qui définissent la nouvelle expression). Au lieu de définir l'implication matérielle "$\rightarrow$" par sa table de vérité, nous pouvons nous servir de l'équivalence sémantique entre $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et $\ulcorner\neg\phi \vee \psi\urcorner$ (si nous avons déjà introduit "$\vee$" et "$\neg$") :

(12) $$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner \quad :\Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg\phi \vee \psi\urcorner$$

(12) nous assure que toutes les formules ayant la forme exposée à gauche ont la même table de vérité que la formule exposée du côté droit de l'équivalence. Ainsi, ii nous avons déjà défini les connecteurs "$\vee$" et "$\neg$", nous pouvons introduire l'expression de gauche (le *definiens*) comme une autre manière d'écrire celle de droite (le *definiendum*). Le fait que nous interprétons l'équivalence sémantique comme équivalence qui détermine la signification du connecteur principal de la formule à gauche est indiqué par les deux points " :" devant le signe d'équivalence sémantique. Par (12), nous annonçons notre intention d'utiliser la formule de gauche comme variante notationnelle de celle qui est à droite.[19]

Nous pouvons donc maintenant constater que les connecteurs propositionnels introduits ne sont pas tous indépendants (qu'ils peuvent être définis en d'autres termes) :

1. Si l'on ne prenait que "$\neg$" et "$\wedge$" comme primitifs (comme Brentano (1874) et Johnson (1947)), nous pourrions définir les autres comme suit :

$$\begin{array}{lcl} \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\phi \wedge \psi)\urcorner \end{array}$$

2. On pourrait aussi (comme Russell et Whitehead (1910) et Hilbert et Ackermann (1928)) ne

[18] Nous avons besoin des demi-crochets car

$$\begin{array}{lcl} \neg(\phi \wedge \psi) & \Longleftrightarrow & \neg\phi \vee \neg\psi \\ \neg(\phi \vee \psi) & \Longleftrightarrow & \neg\phi \wedge \neg\psi \end{array}$$

sont mal formées. Si on remplace ϕ par "Marie a faim" et ψ par "Sam veut se marier", on obtient la proposition mal formée ""Marie a faim" $\wedge$ "Sam veut se marier"" – qui est mal formée puisque "$\wedge$" est un connecteur propositionnel et non pas une relation entre des phrases. On pourrait penser qu'il faut simplement ajouter des guillemets :

$$\begin{array}{lcl} \text{“}\neg(\phi \wedge \psi)\text{”} & \Longleftrightarrow & \text{“}\neg\phi \vee \neg\psi\text{”} \\ \text{“}\neg(\phi \vee \psi)\text{”} & \Longleftrightarrow & \text{“}\neg\phi \wedge \neg\psi\text{”} \end{array}$$

Ces formulations posent également un grave problème du fait de ne pas être générales. Les expressions à gauche et à droite de la flèche double "$\Longleftrightarrow$" ne dénotent que ces expressions particulières. Celle en haut à gauche, par exemple, désigne l'expression qui commence par une négation, continue avec une parenthèse, la lettre grecque "ϕ", le signe de la conjonction, la lettre grecque "ψ" et une parenthèse.

[19] Lorsque la définition est basée sur une identité plutôt que sur une équation, nous ajoutons les deux points au signe d'identité : "Définissons "a" comme suit : $a := \sqrt{b}\ldots$". A la place des deux points, on utilise aussi "déf." comme index :

$$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner \;{}_{\text{déf.}}\!\!\longleftrightarrow \ulcorner\neg\phi \vee \psi\urcorner \qquad a \;{}_{\text{déf.}}\!\!= \sqrt{b}$$

prendre que "¬" et "∨" comme primitifs , et définir les autres en ces termes.

3. Si on ne prenait que "¬" et "→" comme primitifs (comme Frege (1879) et Łukasiewicz (1904)), on pourrait définir les autres comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\phi \rightarrow \neg\psi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg\phi \rightarrow \psi\urcorner \\ \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\urcorner \\ & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \phi))\urcorner \end{array}$$

Dans ces définitions, les signes définis n'apparaissent pas à la droite d'une définition (ils apparaissent dans l'avant-dernière ligne, dans une simple équivalence qui nous sert de modèle pour la définition). Nous avons le droit d'enchaîner des définitions. Ayant défini "∧", par exemple, à partir de "¬" et de "→", nous pouvons l'utiliser ensuite avec "¬" et "→" pour définir "∨".

Les équivalences sémantiques ne nous servent pas seulement à réduire le nombre de connecteurs primitifs (c'est-à-dire ceux qui ne sont pas définis en termes d'autres connecteurs), mais elles sont également utiles pour la simplification de formules difficiles.

1. La conjonction et la disjonction sont commutatives ; "$p \wedge q$" et "$q \wedge p$" sont équivalentes, ainsi que "$p \vee q$" et "$q \vee p$" :

$$\begin{array}{rcl} \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\psi \wedge \phi\urcorner \\ \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\psi \vee \phi\urcorner \end{array}$$

2. Une autre 'loi' (équivalence sémantique générale) nous permet de distribuer la conjonction sur une disjonction et vice versa :

$$\begin{array}{rcl} \ulcorner\phi \vee (\psi \wedge \chi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)\urcorner \\ \ulcorner\phi \wedge (\psi \vee \chi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)\urcorner \end{array}$$

Cette loi, comme son équivalent en algèbre "$x(y + z + \ldots + w) = xy + xz + \ldots + xw$", nous permet de 'factoriser', c'est-à-dire de transformer

$$(p \vee t) \wedge (q \vee r \vee s)$$

en

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (t \wedge q) \vee (t \wedge r) \vee (t \wedge s)$$

3. Étant donné ce que nous avons dit des tautologies et des contradictions, il est toujours possible d'omettre une tautologie qui apparaît à l'intérieur d'une conjonction et une contradiction à l'intérieur d'une disjonction :

$$\begin{array}{rcl} \ulcorner\phi \wedge (\psi \vee \neg\psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \phi \\ \ulcorner\phi \vee (\psi \wedge \neg\psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \phi \end{array}$$

4. D'autres simplifications sont rendues possibles par le fait que ϕ est équivalent à toutes les phrases

suivantes :

$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi\wedge\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi\vee\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi\vee(\phi\wedge\psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi\wedge(\phi\vee\psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi\wedge\psi)\vee(\phi\wedge\neg\psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi\vee\psi)\wedge(\phi\vee\neg\psi)\urcorner$

Points à retenir

1. Il faut distinguer différents niveaux de langage. 'Désignation', 'vérité' et 'validité' sont des expressions qui appartiennent au métalangage.
2. La relation de conséquence sémantique subsiste entre deux phrases s'il n'est pas et seulement s'il n'est pas logiquement possible que la première soit vraie et la deuxième fausse ; s'il y a et seulement s'il y a une inférence valide de l'une à l'autre.
3. Pour rendre compte de la généralité des lois logiques, il convient d'introduire des noms "ϕ", "ψ" etc. pour des phrases arbitraires.
4. Pour dire qu'une loi logique s'applique à toutes les phrases d'une certaine forme, il faut utiliser les crochets de Quine. "$\ulcorner\phi\wedge\neg\psi\urcorner$" est une expression qui est composée de ϕ, du signe de conjonction "$\wedge$", de "$\neg$" et de ψ.
5. Une inférence qui a "p" comme prémisse et "q" comme conclusion est valide si et seulement si "$p \rightarrow q$" est une tautologie.
6. Une tautologie peut être inférée de n'importe quelle prémisse ; on peut inférer n'importe quelle conclusion d'une contradiction.
7. Mis à part la conséquence sémantique (ou 'subalternation'), il y a d'autres relations métalinguistiques entre des phrases : l'équivalence sémantique (mêmes tables de vérité), la contradiction (exactement une est vraie), la contrariété (pas les deux vraies), la sub-contrariété (pas les deux fausses).
8. La validité ne concerne pas l'ordre des prémisses ; elle est monotone, transitive et réflexive.
9. Les lois de Morgan :
$$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$$
$$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner\neg\phi \wedge \neg\psi\urcorner$$
10. Les lois de distributivité :
$$\ulcorner\phi \vee (\psi \wedge \chi)\urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)\urcorner$$
$$\ulcorner\phi \wedge (\psi \vee \chi)\urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)\urcorner$$