Chapitre 6

La déduction naturelle

6.1 Les suppositions

Nous avons rencontré deux manières de construire des preuves :

1. le calcul axiomatique HC, où il faut d'abord trouver les bons axiomes, en faire des substitutions, et enfin appliquer la règle d'inférence MP dans le bon ordre ;
2. la méthode des arbres (ou : la méthode des tableaux analytiques), où l'on décompose successivement la formule initiale en cherchant une interprétation sous laquelle elle est vraie.

La méthode de la réduction à l'absurde, que l'on a introduite comme règle d'introduction de la négation, ne s'insère dans aucune de ces catégories car elle utilise essentiellement la notion de *"supposition"*. Dans la langue naturelle, une supposition est l'énonciation d'une phrase qui manque de force assertoire. Au niveau pragmatique, la force assertoire est ce qui distingue une assertion d'une question ou d'un ordre : c'est en vertu de la force assertoire que quelqu'un qui affirme qu'il pleut s'engage pour la vérité de "il pleut". Si son énonciation manque de force assertoire, on ne peut pas le contredire en disant qu'il ne pleut pas. En effet, il n'a pas affirmé qu'il pleut : il l'a seulement demandé, ordonné ou supposé.

Nous avons dit que la logique s'occupe d'un langage formel, qui fait abstraction de la dimension pragmatique du langage ordinaire. Si nous distinguons la force ou le mode d'un énoncé de son contenu propositionnel et disons que les actes de promettre que p, ordonner que p, prier que p et dire que p impliquent toutes la même phrase "p", ce n'est que de cette proposition, considérée comme étant vraie ou fausse, dont nous nous sommes occupé maintenant. C'est pourquoi on pourrait penser que la logique fait abstraction totale sur tout acte de parole. Nous voyons maintenant que ceci n'est pas entièrement vrai : la distinction entre une affirmation que p et une supposition que p se fait par référence aux différentes 'forces illocutoires' de ces deux actes. Ceux-ci, cependant, resteront les seuls à considérer.

Nous avons déjà fait de nombreuses suppositions tout au long de ce cours. Prenons les exemples suivants :

- "Imaginons que quelqu'un soutienne qu'il ne faut pas manger de la viande. Il pourrait avoir deux types de raisons : ..."
- "Quelqu'un qui affirme que "p" et que "$p \rightarrow q$" sont vraies, devrait alors affirmer que q."
- "Tout en étant convaincus que $\neg p$, supposons que p. Il s'ensuit alors que le numéro 2 n'est pas égal a la somme de 1 + 1, ce qui, nous le savons, est faux. La supposition que p était donc fausse. Donc $\neg p$."

– “Si, comme certains l’affirment, il y a un Dieu, alors ce Dieu est omnipotent. S’il est omnipotent, alors il peut créer une pierre si lourde que Lui-même ne peut la soulever. Mais c’est est impossible. Donc il n’y a pas de Dieu.”

Dans une preuve par la réduction à l’absurde, il serait absurde de reprocher à celui qui la profère de s’être contredit en démontrant (et donc en affirmant) que la phrase de départ est fausse. Ceci montre que l’on a affaire à une supposition : c’est en supposant “p” et en montrant qu’une contradiction s’ensuit que l’on démontre que $\neg p$.

C’est l’usage des suppositions qui caractérise la méthode de la déduction naturelle que l’on abordera dans cette leçon.[1] La déduction naturelle est une manière intuitive de faire des preuves qui s’apparente bien aux raisonnements d’une argumentation. Parce qu’elle nous permet de prouver des théorèmes et parce que l’on peut démontrer que ses théorèmes sont des tautologies, la déduction naturelle est de même une méthode permettant de calculer la validité des arguments : opérant étape par étape, chacune contenant sa propre règle pour aller des prémisses à des conclusions intermédiaires, nous arrivons à la conclusion finale de l’argument.

Même si l’on ne s’engage pas à la vérité de ce que l’on suppose, on tombe sous une obligation correspondante : celle de tenir compte de ses suppositions. De nombreux raisonnements fallacieux se produisent en prenant une supposition pour un fait établi. C’est pourquoi il faut toujours marquer les suppositions dans la colonne à gauche. Considérons le début d’une preuve que $\neg p$ à partir des trois prémisses “$p \to q$”, “$p \to (q \to r)$” et “$\neg r$” :

1	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r$	$\vdash\ p \to (q \to r)$	prémisse
3	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r$	$\vdash\ \neg r$	prémisse
4	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
5	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r, p$	$\vdash^*\ q$	de (1) et (4) par (MP)
6	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r, p$	$\vdash^*\ q \to r$	de (2) et (4) par (MP)
7	$p \to q, p \to (q \to r), \neg r, p$	$\vdash^*\ r$	de (5) et (6) par (MP)

Nous commençons la preuve à la ligne (1) par une énumeration des prémisses : toutes les autres phrases de la preuve seront des conséquences logiques des trois prémisses (1), (2) et (3). Nous introduisons une supposition à la ligne (4). Nous la rajoutons à la colonne gauche et marquons le signe “$\vdash$” pour la relation de déducibilité avec une astérisque : cette astérisque dans $\vdash^*$ nous rappelle que nous n’avons encore rien prouvé sans condition : Les lignes 4 à 7 sont toutes gouvernées par la supposition que p – on a prouvé “r” *sous la supposition que* p (indiqué par l’astérisque dans “$\vdash^*$”). Pour pouvoir dire que l’on a réellement prouvé la vérité d’une certaine proposition, il faut enlever cette supposition et passer de “$\vdash^*$” à “$\vdash$”. Comment se défaire d’une supposition ?

Une règle d’inférence qui nous permet d’ôter une supposition est la *réduction à l’absurde*. Considérons la preuve suivante :

1	$p \to q, q \to \neg p$	$\vdash\ p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to \neg p$	$\vdash\ q \to \neg p$	prémisse
3	$p \to q, q \to \neg p, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$p \to q, q \to \neg p, p$	$\vdash^*\ q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to q, q \to \neg p, p$	$\vdash^*\ \neg p$	de (2) et (4) par (MP)
6	$p \to q, q \to \neg p$	$\vdash \neg p$	de (3) et (5) par *réduction à l’absurde*

[1] Pour la formulation des règles et quelques exemples, je suivrai largement l’excellente présentation de Lemmon (1965b), qui, lui-même, s’est inspiré de Suppes (1957) et Mates (1965) qui suivaient Fitch (1951).

Nous avons supposé que p, dans la ligne 3, et montré sous cette supposition que $\neg p$ (ligne 5). Nous pouvons donc conclure que $\neg p$ – sans aucune supposition : si la supposition que p nous mène à une contradiction, alors $\neg p$ (ligne 6).

L'introduction des suppositions nous permet de compléter non seulement notre discussion sur la négation, mais également celle sur l'implication matérielle. Nous avons vu que la règle d'élimination pour l'implication matérielle ($\rightarrow$ **E**) était la règle d'inférence *modus ponens* (MP) :

$$\frac{\begin{array}{l}\vdash p \rightarrow q \\ \vdash p\end{array}}{\vdash q} \quad \rightarrow \mathbf{E} \text{ ou MP}$$

Dans la deuxième leçon, nous n'avions pas les ressources suffisantes pour introduire la règle d'introduction correspondante ($\rightarrow$ **I**), celle de la *preuve conditionnelle* (PC) :

$$\frac{\begin{array}{lll} p & \vdash^* & p \\ & \vdots & \\ p & \vdash^* & q \end{array}}{\vdash p \rightarrow q} \quad \rightarrow \mathbf{I} \text{ ou PC}$$

Cette règle nous permet de remplacer une supposition par une implication matérielle : si "q" a été prouvé sous la supposition que p, nous avons prouvé, sous aucune supposition, que $p \rightarrow q$. Avec cette règle à notre disposition, continuons notre preuve que $\neg p$:

7	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r, p$	$\vdash^* \ r$	de (5) et (6) par (MP)
8	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
9	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ \neg r \rightarrow \neg p$	de (8) par *conversion*
10	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ \neg p$	de (3) et (9) par (MP)

Dans la ligne (9), nous avons utilisé une règle d'inférence dérivée, appelée "conversion", dont le schéma est le suivant (cf. p. 90) :

(1) $$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p} \quad \text{conversion (CP)}$$

Ce schéma correspond à la tautologie "$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$" et est donc valide. Nous pouvons même économiser encore une autre ligne en utilisant la règle de *modus tollens* (MT) :

3	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ \neg r$	prémisse
8	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
10′	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ \neg p$	de (3) et (8) par (MT)

Nous voyons que dans un calcul de déduction naturelle, il est facile d'introduire des règles d'inférence dérivées (comme nous l'avons fait avec CP, la règle de la conversion). Dans un calcul hilbertien, on aurait été obligé de procéder comme suit :

3	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ \neg r$	prémisse
8	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
8a	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ (p \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p)$	axiome ($\mathbf{H}_{11}$)
8b	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ \neg r \rightarrow \neg p$	de (8) et (8a) par (MP)
9′	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \ \neg p$	de (3) et (8b) par (MP)

La nouvelle règle d'inférence (MT) nous permet d'épargner les lignes (8a) et (8b).

6.2 Les règles d'introduction et d'élimination

L'utilisation d'une langue formelle pour la logique propositionnelle nous oblige d'expliquer ce que nous voulons dire par les symboles introduits à ce propos : nous devons fixer leur signification. Une manière sémantique de le faire est de donner des tables de vérité, exploitant ainsi le principe de vérifonctionnalité.

Outre les tables de vérité, il existe une autre méthode qui permet de déterminer la signification des connecteurs propositionnels : les règles d'introduction et d'élimination déterminent le comportement 'inférentiel' de ces connecteurs – ce qui, pour ceux qui conçoivent la logique comme systématisation d'inférences, comprend l'essentiel de leur signification. Complétant notre discussion des connecteurs dans la leçon 2 (p. 37 et suivants) , nous postulons les règles suivantes comme règles d'introduction et d'élimination pour les connecteurs propositionnels :

$$\frac{\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \bot\urcorner}{\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner}\ \neg\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner}{\vdash \phi}\ \neg\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash \psi\\ \vdash \phi\end{array}}{\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner}\ \wedge\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner}{\vdash \phi}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \frac{\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner}{\vdash \psi}\ \wedge\mathbf{E}$$

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \psi}{\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner\\ \vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner\end{array}}{\vdash \psi}\ \vee\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi \vdash^* \phi\\ \phi \vdash^* \psi\end{array}}{\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner}\ \rightarrow\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash \phi\\ \vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner\end{array}}{\vdash \psi}\ \rightarrow\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash \ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner\\ \vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner\end{array}}{\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner}{\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{E} \qquad \frac{\vdash \ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner}{\vdash \ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{E}$$

La règle d'introduction pour la négation ($\neg$**I**), comme nous l'avons vu à la p. **??**, utilise "$\bot$", une abréviation pour n'importe quelle phrase contradictoire.

Ces règles, avec quelques modifications, seront les règles de la déduction naturelle.[2]

Ces règles, comme les règles d'inférence, sont schématiques : la règle ($\neg$**E**), par exemple, nous dit que nous pouvons prouver une phrase "p" à partir de sa double négation "$\neg\neg p$" (et que nous pouvons également prouver "$p \wedge q$" à partir de "$\neg\neg(p \wedge q)$", "$(p \rightarrow q) \vee r$" à partir de "$\neg\neg((p \rightarrow q) \vee r)$" etc).

Il est important de noter que ces règles reviennent à une spécification syntaxique des connecteurs propositionnels (puisqu'on n'a pas encore prouvé la validité de ces règles). Comment est-ce possible ? Pour donner une 'spécification syntaxique' de la signification d'un connecteur, nous formulons des règles qui permettent de manipuler des formules qui le contiennent. Nous déterminons ainsi le comportement inférentiel de ce connecteur, en lui donnant une *définition implicite* : quelle que soit la

[2]On fera une modification pour la règle d'introduction de la négation : la règle $\neg$**I** sera remplacée par les règles de modus tollens MT et de la réduction à l'absurde RAA. Une modification correspondante s'appliquera à la règle d'élimination de la disjonction $\vee$**E**.

signification de "$\wedge$", elle est telle qu'elle permet l'introduction de ce signe selon la règle $\wedge$**I**.[3]

Il existe différentes façons de fournir une définition implicite des connecteurs propositionnels : par un système d'axiomes comme l'est le calcul HC, par des règles de construction d'arbres et également par des règles d'élimination et d'introduction. Ces dernières sont de loin les plus intuitives et c'est sur elles que la méthode de la déduction naturelle est basée.

6.3 Les règles de la déduction naturelle

Nous avons déjà montré qu'il y a des théor'mes du calcul axiomatique qui correspondent à des règles d'inférences de la déduction naturelle : la règle dérivée de conversion CP, par exemple, correspond au théorème "$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$" de HC. Il s'agit d'un phénomène général : normalement, les calculs axiomatiques consistent en de nombreux axiomes et une seule règle d'inférence – modus ponens (MP). Les calculs de la déduction naturelle – comme celui de la méthode des arbres – n'ont pas d'axiomes, mais de nombreuses règles d'inférences pour déduire des théorèmes à partir des prémisses. Nous allons discuter maintenant de quelques règles d'inférences en détail. Prises ensemble, ces règles nous permettent de démontrer toute tautologie de la logique propositionnelle : elles forment un calcul correct et complet par rapport à la sémantique donnée de la logique propositionnelle.

La règle des suppositions

A n'importe quel stade de la preuve, nous avons le droit d'introduire une supposition, à condition que nous la marquions dans la deuxième colonne à partir de la gauche :

n	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition

Modus ponens (modus ponendo ponens)

La règle de modus ponens (abrégée '(MP)' ou '($\rightarrow$ **E**)') nous permet de passer d'une implication matérielle et de son antécédent à son conséquent :

m	$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \phi$	
.	.	
.	.	
.	.	
o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (MP)

[3]Une définition explicite en revanche, consiste en des conditions nécessaires et suffisantes d'une paraphrase (cf. p. 66) : elle permet de re-écrire tout contexte contenant la nouvelle expression définie en n'utilisant que les expressions qui ont servi à sa définition – le definiens est universellement substituable pour le definiendum.

Modus tollens (modus tollendo tollens)

La règle de modus tollens (abrégée '(MT)') nous permet de passer d'une implication matérielle et de la négation de son conséquent à la négation de son antécédent :

m	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner \neg\psi \urcorner$	
⋮	⋮	
o	$\vdash \ulcorner \neg\phi \urcorner$	de (m) et (n) par (MT)

La règle de modus tollens remplace la règle de conversion. Si on a prouvé "$p \rightarrow q$" et "$\neg q$", la conversion de la première nous donne "$\neg q \rightarrow \neg p$" et "$\neg p$" s'ensuit par (MP). Avec (MT), nous pouvons en déduire "$\neg p$" sans aucune étape intermédiaire.

Preuve conditionnelle

La règle de la preuve conditionnelle (abrégée '($\rightarrow$ **I**)' ou '(PC)') nous permet de transformer une sous-preuve (une preuve gouvernée par une supposition) en une preuve d'une implication matérielle ; elle nous permet de déduire une implication si et seulement s'il est possible de prouver par d'autres moyens que le conséquent de l'implication peut être dérivé de son antécédent.

m	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
⋮		⋮	
n	ϕ	$\vdash^* \ \psi$	
⋮		⋮	
o		$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	de (m) et (n) par (PC)

Dans la ligne (o), nous *déchargeons* la supposition ϕ par laquelle nous avons commencé la sous-preuve de (m) à (n) et nous *conditionalisons* le résultat intermédiaire ψ qui était gouverné par la supposition ϕ.

L'introduction et l'élimination de la double négation

La règle de l'élimination de la double négation (($\neg$**E**) ou (DN)) est la suivante :

m	$\vdash \ulcorner \neg\neg\phi \urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \phi$	de (m) par (DN)

De la même manière, nous pouvons introduire une double négation (par exemple pour une application éventuelle de (MT)) :

m	$\vdash \phi$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	de (m) par (DN)

La réduction à l'absurde (reductio ad absurdum)

La règle de la réduction à l'absurde ((RAA) ou ($\neg$**I**)) nous permet de convertir une sous-preuve particulière (qui part de la supposition que p et qui en dérive une contradiction) en une preuve que $\neg p$:

m	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
.		.	
.		.	
.		.	
n	ϕ	$\vdash^* \ \psi$	
.		.	
.		.	
.		.	
o	ϕ	$\vdash^* \ \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
.		.	
.		.	
.		.	
p		$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	de (m), (n) et (o) par (RAA)

Sous la supposition ϕ (ligne m), nous avons démontré ψ (ligne n) et $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ (ligne o). Or ψ et $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ ne peuvent pas être vraies ensemble. Nous pouvons donc conclure que la supposition initiale ϕ était fausse et écrire $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ à la ligne p. Nous avons 'réduit à l'absurde' la supposition ϕ et donc prouvé sa négation.

D'après cette règle, si votre interlocuteur pose une hypothèse ("p") dont on peut prouver qu'elle nous mène à une contradiction ("$q \wedge \neg q$"), alors cette hypothèse doit être rejetée et sa négation "$\neg p$" peut être affirmée.[4]

[4] Ce contraste entre la *permission* d'affirmer une conséquence logique de ce qu'on a affirmé auparavant et l'*interdiction* d'en affirmer la négation a déjà été constaté à la p. **??**.

L'introduction et l'élimination de la conjonction

La règle d'introduction de la conjonction ($\wedge$**I**) nous permet d'inférer "$p \wedge q$" si on a déjà prouvé que p et que q :

m	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	de (m) et (n) par ($\wedge$**I**)

L'élimination de la conjonction se fait en inférant un des conjoints de la phrase conjonctive :

m	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \phi$	de (m) par ($\wedge$**E**)

m	$\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \psi$	de (m) par ($\wedge$**E**)

L'introduction et l'élimination de la disjonction

Les règles d'introduction de la disjonction sont 'duales' aux règles d'élimination de la conjonction :[5]

m	$\vdash \phi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	de (m) par ($\vee$**I**)

m	$\vdash \psi$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	de (m) par ($\vee$**I**)

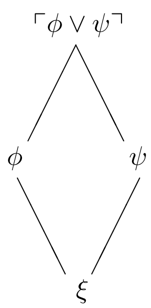
Si Louis XVI a été guillotiné, alors soit il a été guillotiné, soit il a été pendu. Cette phrase est vraie, même si l'on sait très bien qu'il n'a pas été pendu.

[5] Nous appelons "duale" la transformation d'une conjonction en une disjonction niée ou d'une disjonction en une conjonction niée, suivant les lois de Morgan.

L'élimination de la disjonction est un peu plus complexe et présuppose la règle des suppositions. Considérons le schéma de preuve suivant :

m		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
$\vdots$		$\vdots$	
n	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
o	ϕ	$\vdash^* \ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
p	ψ	$\vdash^* \ \psi$	supposition
$\vdots$		$\vdots$	
q	ψ	$\vdash^* \ \chi$	
$\vdots$		$\vdots$	
r		$\vdash \chi$	de (m), (n), (o), (p) et (q) par ($\vee$**E**)

L'idée qui motive cette règle d'inférence est la suivante : si une disjonction "$p \vee q$" a été établie, et qu'on montre que de "p" il s'ensuit "r", et que de "q" il s'ensuit également "r" ; alors, de la disjonction "$p \vee q$", il s'ensuit que r. Si nous avons, à la ligne **m**, prouvé la disjonction, on a prouvé que r. Ce qui s'ensuit à la fois des deux disjoints s'ensuit de la disjonction même. Nous pouvons donner une interprétation graphique de ($\vee$**E**) comme suit :



Si je veux rejoindre mon ami et je sais qu'il est soit à l'université, soit en ville, mais si je sais également que s'il est à l'université, il sera à la fête de Maurice et aussi que s'il est en ville, il sera également à la fête de Maurice, alors je sais qu'il sera à la fête de Maurice – mon ignorance concernant la question lequel des disjoints rend vraie la disjonction est 'annulée' par mon savoir que dans les deux cas, il sera à la fête.

L'introduction et l'élimination de l'équivalence matérielle

Puisque l'équivalence matérielle est simplement l'implication matérielle 'réciproque', on a comme règle d'introduction :

m	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
o	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	de (m) et (n) par ($\leftrightarrow$ **I**)

Les règles d'élimination nous montrent que l'équivalence est simplement la conjonction des deux implications matérielles :

m	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

m	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

6.4 Les preuves par déduction naturelle

Mis à part l'usage des suppositions, une deuxième caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est qu'elle nous permet d'incorporer des *prémisses.* Dans un calcul axiomatique, il faut distinguer ce qui est dérivable tout court (les théorèmes) de ce qui est dérivable d'une théorie. Les théories, dans les calculs axiomatiques, jouent un rôle comparable à celui des prémisses dans la déduction naturelle. On marquera les prémisses dans la deuxième colonne à gauche, avec les suppositions. Contrairement aux suppositions il ne faut pas les supprimer pour obtenir une preuve : la preuve elle-même sera 'conditionnelle' : on montrera qu'une certaine phrase (la conclusion) *peut être dérivée à partir de* certaines autres (les prémisses). Toutes nos règles sauf PC et RAA présupposent que l'on ait déjà démontré une ou plusieurs phrases et nous servent donc à établir des phrases à partir de certaines prémisses.

L'usage des prémisses nous permet d'éviter des substitutions. Pour montrer, par exemple, la commutativité de la conjonction, une simple preuve de quatre lignes nous suffit :

1	$p \wedge q$	$\vdash p \wedge q$	prémisse
2	$p \wedge q$	$\vdash p$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$p \wedge q$	$\vdash q$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge q$	$\vdash q \wedge p$	de (2) et (3) par ($\wedge$**I**)

On remarque, cependant, que mêmes les prémisses doivent être introduites dans la preuve.

PC et RAA nous permettent de démontrer des tautologies, c'est-à-dire des phrases dont les preuves ne nécessitent pas de prémisses. Pour démontrer "$\vdash p \to p$", par exemple, nous procédons comme suit :

1	p	$\vdash^* p$	supposition
2	p	$\vdash^* p$	de (1)
3		$\vdash p \to p$	de (1) et (2) par (PC)

Dans la colonne de gauche, on énumère les lignes ; dans la deuxième, on met des prémisses (qu'il n'y a pas dans cet exemple) et des suppositions ; dans la troisième, soit "$\vdash^*$" (si on est en train de démontrer une phrase sous une supposition), soit "$\vdash$" (si on n'a pas fait de supposition ou éliminé toutes celles que l'on a faites) ; dans la quatrième colonne, la phrase principale ; dans la cinquième, la manière dont on est arrivé à la phrase principale : s'il s'agit d'une prémisse, d'une supposition ou de la conclusion d'une règle d'inférence.

Si on a des prémisses, on commence par les incorporer dans la preuve. Supposons que nous voulions prouver "$p \to r$" à partir des deux phrases "$p \to q$" et "$q \to r$". Nous commençons avec l'énonciation de ces prémisses comme suit :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash q \to r$	prémisse

Cette règle correspond au fait que l'on a, dans un calcul axiomatique, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi$ pour toute formule $\phi \in \mathsf{Th}$ (cf. def. 9 à la p. 79. Puisque que nous cherchons à établir une conclusion conditionnelle (à savoir "$p \to r$"), nous supposons son antécédent :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^* p$	supposition

Cette supposition nous permet d'appliquer (MP) : nous obtenons ainsi "q" – ce qui, avec la deuxième prémisse, nous permet la dérivation de "r" :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^* p$	supposition
4	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^* q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^* r$	de (2) et (4) par (MP)

En appliquant de la règle de la preuve conditionnelle, nous avons établi notre conclusion sous aucune supposition à partir des deux prémisses originales :

1	$p \to q, q \to r$	$\vdash p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r$	$\vdash q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^* p$	supposition
4	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^* q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to q, q \to r, p$	$\vdash^* r$	de (2) et (4) par (MP)
6	$p \to q, q \to r$	$\vdash p \to r$	de (3) et (5) avec (PC)

La dernière ligne nous assure maintenant que l'on peut prouver "$p \to r$" des deux prémisses "$p \to q$" et "$q \to r$".

Examinons une preuve qui utilise la règle de la réduction à l'absurde et essayons de déduire "$\neg(p \wedge q)$" à partir de "$p \rightarrow \neg q$". Nous commençons par l'énonciation de la prémisse et supposons la négation de la conclusion désirée :

1	$p \rightarrow \neg q$	$\vdash\ p \rightarrow \neg q$	prémisse
2	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p \wedge q$	supposition

Sous cette supposition, nous cherchons à déduire une contradiction : (RAA) nous permettra alors de conclure que la supposition est fausse et que par conséquent sa négation est vraie :

1	$p \rightarrow \neg q$	$\vdash\ p \rightarrow \neg q$	prémisse
2	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p \wedge q$	supposition
3	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p$	de (2) par ($\wedge$**E**)
4	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ \neg q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ q$	de (2) par ($\wedge$**E**)
6	$p \rightarrow \neg q$	$\vdash\ \neg(p \wedge q)$	de (2), (4) et (5) par (RAA)

Il est souvent crucial de bien se servir de la règle des suppositions : elle nous permet de 'sortir' l'information que contiennent les prémisses. Pour pouvoir utiliser, par exemple, "$q \rightarrow r$" dans une preuve qui a "$p \rightarrow (q \rightarrow r)$" comme prémisse, on suppose "p". Le choix des règles est non seulement motivé par les prémisses qui sont à notre disposition, mais également par la conclusion désirée : si la conclusion désirée a par exemple la forme d'une implication, on se servira de la règle de la preuve conditionnelle (PC). Dans le cas où la conclusion est une phrase simple ou une négation, on utilisera la réduction à l'absurde (RAA).

La règle de supposition nous permet de 'conditionaliser' n'importe quelle ligne de notre preuve : si on a prouvé que q, par exemple, il suffit de supposer "p" pour dériver "$p \rightarrow q$" par la règle (PC). Il est donc aussi possible d'utiliser la même phrase plusieurs fois, par exemple pour prouver "$p \rightarrow (p \rightarrow q)$" à partir de "$q$" :

1	q	$\vdash\ q$	prémisse
2	q, p	$\vdash^*\ p$	supposition
3	q	$\vdash\ p \rightarrow q$	de (1) et (2) par (PC)
5	q	$\vdash\ p \rightarrow (p \rightarrow q)$	de (3) et (2) par (PC)

La règle d'élimination d'une disjonction ($\vee$**E**) semble un peu compliquée, mais correspond à un principe de raisonnement naturel. A partir d'une prémisse disjonctive, on peut démontrer n'importe quelle phrase dont la vérité ne dépend pas de notre choix du disjoint : même si nous ignorons quel disjoint est vrai, nous pouvons dans tous les cas être certain d'une phrase qui s'ensuit des deux. Si je sais que Marie fait sa fête aujourd'hui ou demain, mais que, de toute façon, je ne serai pas invité, alors je sais que je ne serai pas invité. Si vous êtes d'accord que soit il pleut, soit il fait beau et que, s'il pleut, nous n'allons pas faire de sport aujourd'hui et que, s'il fait beau, il fait trop chaud et donc nous n'allons pas faire de sport aujourd'hui, alors on est d'accord que nous ne ferons pas de sport aujourd'hui. En utilisant la règle ($\vee$**E**), nous démontrons la commutativité de la disjonction comme suit :

1	$p \vee q$	$\vdash p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p$	$\vdash^* p$	supposition
3	$p \vee q, p$	$\vdash^* q \vee p$	de (2) par ($\vee$**I**)
4	$p \vee q, q$	$\vdash^* q$	supposition
5	$p \vee q, q$	$\vdash^* q \vee p$	de (4) par ($\vee$**I**)
6	$p \vee q$	$\vdash q \vee p$	de (1,2,3,4,5) par ($\vee$**E**)

Ce dernier exemple nous montre comment nous servir de la règle (RAA) pour établir une conclusion positive :

1	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$	prémisse
2	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^* \neg(p \vee q)$	supposition
3	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^* p$	supposition
4	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^* p \vee q$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^* \neg(p \vee q)$	de (2)
6	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^* \neg p$	de (3), (4) et (5) par (RAA)
7	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^* q$	supposition
8	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^* p \vee q$	de (6) par ($\vee$**I**)
9	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^* \neg(p \vee q)$	de (2)
10	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^* \neg q$	de (7), (8) et (9) par (RAA)
11	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^* \neg p \wedge \neg q$	de (5) et (8) par ($\wedge$**I**)
12	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^* \neg(\neg p \wedge \neg q)$	de (1)
13	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash \neg\neg(p \vee q)$	de (2), (11) et (12) par (RAA)
14	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash p \vee q$	de (13) par (DN)

Nous répétons la ligne (2) aux lignes (5) et (9) et la ligne (1) à la ligne (12) pour permettre des applications de (RAA) à des lignes qui partagent leurs supposition : ceci est permis parce que ce qui est prouvé sans supposition reste prouvé même si nous ajoutons d'autres suppositions. La double application de (RAA) aux disjonctions introduits aux lignes (4) et (11) nous permet de déduire une contradiction à la supposition de la négation de la conclusion voulue. Nous omettrons cette complication dans les preuves qui suivent.

6.5 Une heuristique pour la déduction naturelle

La déduction naturelle est une méthode beaucoup moins 'mécanique' que la méthode des arbres ; elle est, cependant, plus intuitive que le calcul axiomatique HC. Surtout avec des règles dérivées, elle correspond assez bien à notre manière 'naturelle' de raisonner, Il est peut-être utile, cependant, de mentionner quelques conseils pratiques.[6]

Essayez de 'faire sortir' le contenu de ce que vous avez déjà démontré. Si vous avez des prémisses ou des phrases déjà démontrées de la forme $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, utilisez ($\wedge$**E**). Si vous avez des prémisses ou des phrases déjà démontrées de la forme $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$, essayez de prouver la conclusion à partir de ϕ et à partir de ψ et utilisez ($\vee$**E**). S'il y a une prémisse ou une phrases déjà démontrée de la forme $\ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner$, essayez de prouver ϕ ou de prouver ψ et utilisez ($\vee$**I**) pour obtenir une contradiction.

Essayez de 'simplifier' le plus possible. S'il y a deux prémisses ou des phrases déjà démontrées de la

[6] Je suis ici d'assez près Lepage (2001: 149).

forme $\phi, \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$, utilisez (MP). S'il y a deux prémisses ou des phrases déjà démontrées de la forme $\ulcorner\neg\psi\urcorner, \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$, utilisez (MT).

Laissez-vous guider par la forme de la conclusion envisagée. Si elle a la forme d'une implication $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$, supposez que ϕ, prouvez que ψ et utilisez (PC). Si elle a la forme $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, prouvez que ϕ, prouvez que ψ et utilisez ($\wedge$**I**).

Utilisez (RAA) pour obtenir des conclusion négatives ou atomiques. Si la forme $\ulcorner\neg\phi\urcorner$, supposez que ϕ, prouvez, sous cette supposition, que ψ et que $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et utilisez (RAA). Si vous voulez prouver "p", supposez "$\neg p$", prouvez, sous cette supposition, que ψ et que $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et utilisez (RAA).

Attention avec les disjonctions ! Si la conclusion a la forme $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$, il y a trois possibilités :

(i) essayez de prouver ϕ,
(ii) essayez de prouver ψ ou
(iii) essayez de réduire $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$ à l'absurde.

La méthode de la déduction naturelle consiste essentiellement en les douze règles suivantes :

supposition : je peux supposer ce que je veux (si j'en tiens compte par la suite)
MP : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et aussi "p", je peux écrire "q".
MT : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
PC : si j'ai supposé "p" et montré ensuite"q", je peux écrire "$p \rightarrow q$".
DN : si j'ai déjà "$\neg\neg p$", je peux écrire "p" ; si j'ai déjà "p", je peux écrire "$\neg\neg p$".
RAA : si j'ai supposé "p" et montré qu'il s'ensuit "q" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
$\wedge$**I** : si j'ai déjà "p" et "q", je peux écrire "$p \wedge q$".
$\wedge$**E** : si j'ai déjà "$p \wedge q$", je peux écrire "p" et aussi écrire "q".
$\vee$**I** : si j'ai déjà "p", je peux écrire "$p \vee q$" ; si j'ai déjà "q", je peux écrire "$p \vee q$".
$\vee$**E** : si j'ai montré "$p \vee q$" et que "r" s'ensuit de "p" et que "r" s'ensuit de "q", je peux écrire "r".
$\leftrightarrow$ **I** : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow p$", je peux écrire "$p \leftrightarrow q$".
$\leftrightarrow$ **E** : si j'ai déjà "$p \leftrightarrow q$", je peux écrire "$p \rightarrow q$" et aussi écrire "$q \rightarrow p$".

Ces règles nous disent comment nous pouvons manipuler des séquences de symboles de la forme "$\phi \vdash \psi$", en composant une preuve d'un certain théorème ("$\vdash \chi$") ou d'une phrase à partir de quelques prémisses ("$\zeta \vdash \chi$"). Il est important de noter que ces règles nous donnent que des permissions. Elles ne nous obligent à rien. La seule 'obligation' dont on peut parler en logique est celle d'éviter des erreurs dans l'application des règles données. Les règles elles-mêmes nous donnent la permission de passer de certaines phrases à certaines autres.

C'est en ce sens-là que la logique ne s'occupe pas de vérités, mais de connexions, surtout de connexions inférentielles, entre des phrases. Elle ne se préoccupe pas de savoir comment est le monde, mais cherche à déterminer comment il peut ou doit être à partir d'autres phrase dont la vérité est considérée comme acquise. Par conséquent, l'usage des suppositions n'est pas seulement important pour la déduction naturelle, mais il est essentiel à la nature-même de la logique.

6.6 Une notation en termes de déductibilité

Nous verrons à p. 126 du chapitre 7 que nous pouvons prouver ψ à partir de ϕ ($\phi \vdash \psi$) si et seulement si nous pouvons prouver l'implication de ψ par ϕ : $\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$.

Même en présence d'un tel 'théorème de déduction', il est important de distinguer les conclusions conditionnelles des théorèmes. Une conclusion conditionnelle a la forme suivante :

(2) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$

La conclusion ψ est 'conditionnelle' parce qu'elle dépend des prémisses $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. Nous appellerons toute expression de la forme (2) un *"séquent"*. Un séquent est un schéma d'une inférence ; (2) dit qu'à partir des prémisses $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$, on peut déduire ψ. Un théorème, cependant, est un séquent qui manque de prémisses :

(3) $\vdash \psi$

(3) dit que ψ peut être prouvé sans aucune prémisse et que, par conséquent, ψ est un théorème. Ce sont des théorèmes qui, en premier lieu, sont appelés "(logiquement) vrais" ou "(logiquement) faux" et les séquents qui sont proprement dits "valides" ou "invalides". Notre test sémantique de validité correspond donc maintenant à un test syntaxique de déductibilité. Nous avons dit qu'un argument de la forme "p ; q ; r ; donc s" est valide si et seulement si l'implication matérielle correspondante "$(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$" est une tautologie. Étant donné le théorème de déduction, ceci revient à dire qu'un séquent "$\phi \vdash \psi$" peut être prouvé si et seulement si l'implication correspondante est un théorème : $\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$.

6.7 Les règles dérivées

Un avantage majeur de la méthode de la déduction naturelle est l'usage des règles dérivées. Examinons un exemple :

Au lieu de ($\vee$**E**), nous aurions aussi pu choisir le syllogisme disjonctif (SD) pour éliminer la disjonction "$\vee$" d'une formule :

m	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner \neg\phi \urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (SD)

m	$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner \neg\psi \urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
o	$\vdash \phi$	de (m) et (n) par (SD)

Le syllogisme disjonctif correspond à un cas spécial de la règle ($\vee$**E**). Voici comment nous déduisons un cas particulier du syllogisme disjonctif, à savoir "$\neg p, p \vee q \vdash q$".

1	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	$\neg p$	prémisse
2	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	$p \vee q$	prémisse
3	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$\neg p \vee q$	de (1) par ($\vee$**I**)
5	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q$	$\vdash^*$	$p \wedge \neg q$	supposition
6	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q, \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
7	$\neg p, p \vee q, p, \neg p$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (5), (3) et (6) par (RAA)
8	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
9	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q, q$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (5) par ($\wedge$**E**)
10	$\neg p, p \vee q, p, q$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (5), (8) et (9) par (RAA)
11	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (4, 6, 7, 8, 10) par ($\vee$**E**)
12	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	p	supposition
13	$\neg p, p \vee q, p, p, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
14	$\neg p, p \vee q, p, p, \neg q$	$\vdash^*$	$p \wedge \neg q$	de (12) et (13) par ($\wedge$**I**)
15	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg q$	de (13), (14) et (11) par (RAA)
16	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	q	de (15) par (DN)
17	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$p \rightarrow q$	de (12) et (16) par (PC)
18	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	q	de (3) et (17) par (MP)
19	$\neg p, p \vee q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
20	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	q	de (2, 3, 18, 19, 19) par ($\vee$**E**)

On remarquera que les preuves par la déduction naturelle ne sont pas forcément simples. Étant donné cet effort, il serait légitime d'espérer pouvoir réutiliser un résultat prouvé, c'est-à-dire avoir à notre disposition la règle dérivée du syllogisme disjonctif en toute généralité. Nous prouverons un méta-théorème qui nous donne le droit de procéder ainsi.

Avant cela, il est nécessaire de définir ce qu'est une instance de substitution :

Définition 22 (Instance de substitution)**.** *Si ϕ est une formule bien formée de $\mathcal{L}$, ϕ' est une instance de substitution de ϕ si et seulement si ϕ' est le résultat d'une substitution uniforme d'une ou de plusieurs phrases dans ϕ par d'autres phrases. Un séquent "$\phi' \vdash \psi'$" est une instance de substitution d'un autre séquent "$\phi \vdash \psi$" si et seulement si ϕ' et ψ' résultent de ϕ et ψ par une substitution uniforme d'une ou de plusieurs phrases dans ϕ ou dans ψ par d'autres phrases.*

Une substitution uniforme d'une expression dans une autre est le remplacement de l'une par l'autre *à toutes ses occurrences* : si nous nous décidons de remplacer "$\neg p$" par "q", par exemple, nous devons remplacer l'un par l'autre *à tous les endroits* où le premier se trouve.

Parmi les instances de substitution de "$p \vee \neg p$", par exemple, on trouve les suivants :

1. "$q \vee \neg q$",
2. "$(q \rightarrow r) \vee \neg(q \rightarrow r)$",
3. "$(p \wedge \neg p) \vee \neg(p \wedge \neg p)$" etc.

"$(r \vee s) \rightarrow (p \vee \neg(\neg(r \vee s) \wedge p))$" est une instance de substitution de "$p \rightarrow (q \vee \neg(\neg p \wedge q))$" (substituant "$(r \vee s)$" à "$p$" et "$p$" à "$q$") et "$p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow \neg s), p, \neg\neg s \vdash \neg(q \wedge r)$" est une instance de substitution de "$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$" (substituant "$(q \wedge r)$" à "$q$" et "$\neg s$" à "$r$"), même si "$\neg s \rightarrow q \vee \neg(s \wedge q)$" ne l'est pas (puisque "$\neg s$" remplace "p" et "s" remplace "$\neg p$" et la substitution n'est donc pas uniforme).

Voici le méta-théorème qui nous donne droit aux règles d'inférence dérivées :

Théorème 23 (Substituabilité)**.** *Si ϕ est un théorème de la déduction naturelle, toute instance de sub-*

stitution de ϕ peut être prouvée. Si $\ulcorner\phi \vdash \psi\urcorner$ est un séquent prouvé, toute instance de substitution de $\ulcorner\phi \vdash \psi\urcorner$ peut être prouvée.

Preuve Il est évident que les règles d'inférence appliquées ne concernent que cette partie de la structure de ϕ et de ψ qui reste invariables sous la substitution. La preuve originale du théorème ou du séquent peut, par conséquent, être transformée en une preuve de son instance de substitution. □

Grâce à ce théorème, nous pouvons désormais utiliser la règle du syllogisme disjonctif comme règle dérivée : Chaque fois que nous avons

m	$p \vee q, \neg p$	$\vdash r$	

ou une instance de substitution de ce séquent, nous pouvons écrire pour la ligne suivante :

n	$p \vee q, \neg p$	$\vdash q$	de (m) par (SD)

La même chose vaut pour la conversion : comme suite de

o	$p \to q$	$\vdash r$	

ou d'une instance de substitution de ce séquent, nous pouvons écrire :

p	$p \to q$	$\vdash \neg q \to \neg p$	de (p) par (CP)

puisque "$p \to q \vdash \neg q \to \neg p$" peut être prouvé.

Une autre règle dérivée utile est l'application des lois de Morgan, dont nous prouvons un cas particulier comme suit :

1	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	prémisse
2	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	supposition
3	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
4	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q). \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p \vee \neg q$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	p	de (5) par (DN)
7	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
8	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q). \neg q$	$\vdash^*$	$\neg p \vee \neg q$	de (7) par ($\vee$**I**)
9	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg\neg q$	de (7), (2) et (8) par (RAA)
10	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	q	de (9) par (DN)
11	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$p \wedge q$	de (6) et (10) par ($\wedge$**I**)
12	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	de (2), (1) et (11) par (RAA)
13	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	de (12) par (DN)

Nous avons donc prouvé le séquent "$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$". Pour prouver le séquent converse, nous procédons comme suit :

1	$\neg p \vee \neg q$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	prémisse
2	$\neg p \vee \neg q, \neg p$	$\vdash$	$\neg p$	supposition
3	$\neg p \vee \neg q, \neg p, p \wedge q$	$\vdash$	$p \wedge q$	supposition
4	$\neg p \vee \neg q, \neg p, p \wedge q$	$\vdash$	p	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\neg p \vee \neg q, \neg p$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg p \vee \neg q, \neg q$	$\vdash$	$\neg q$	supposition
7	$\neg p \vee \neg q, \neg q, p \wedge q$	$\vdash$	$p \wedge q$	supposition
8	$\neg p \vee \neg q, \neg q, p \wedge q$	$\vdash$	q	de (7) par ($\wedge$**E**)
9	$\neg p \vee \neg q, \neg q$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (7), (6) et (8) par (RAA)
10	$\neg p \vee \neg q$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (1, 2, 5, 6, 9) par ($\vee$**E**)

Nous avons démontré l'interdéductibilité des deux phrases, c'est-à-dire établi que "$\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$" ce qui nous donne le droit d'utiliser cette loi de Morgan dans de futures preuves.

Il est à noter que l'application des règles dérivées présuppose la preuve des séquents ou théorèmes correspondants.

Les douze règles données n'étaient pas toutes indépendantes les unes des autres : voici comment nous dérivons la règle MT de MP et RAA :

1	$p \to q, \neg q$	$\vdash p \to q$	prémisse
2	$p \to q, \neg q$	$\vdash \neg q$	prémisse
3	$p \to q, \neg q, p$	$\vdash^* p$	supposition
4	$p \to q, \neg q, p$	$\vdash^* q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to q, \neg q$	$\vdash \neg p$	de (3), (2) et (4) avec (RAA)

Une axiomatisation utilisant les onze autres règles sauf MT serait donc également correcte et complète.

Points à retenir

1. La caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est l'usage des suppositions. La règle des suppositions nous permet d'introduire n'importe quelle supposition à n'importe quelle étape de la preuve ; les règles PC, RAA et $\vee$**E** nous permettent de nous en décharger.
2. Les règles de la déduction naturelle sont des règles d'introduction et d'élimination des connecteurs propositionnels.
3. La méthode de la déduction naturelle consiste en les règles suivantes :
   supposition : je peux supposer toute phrase (si j'en tiens compte ensuite)
   MP : si j'ai déjà $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ et aussi ϕ, je peux écrire ψ.
   MT : si j'ai déjà $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ et aussi $\ulcorner \neg\psi \urcorner$, je peux écrire $\ulcorner \neg\phi \urcorner$.
   PC : si j'ai supposé ϕ et montré ensuiteψ, je peux écrire $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$.
   DN : si j'ai déjà $\ulcorner \neg\neg\phi \urcorner$, je peux écrire ϕ ; si j'ai déjà ϕ, je peux écrire $\ulcorner \neg\neg\phi \urcorner$.
   RAA : si j'ai supposé ϕ et montré qu'il s'ensuit ψ et aussi $\ulcorner \neg\psi \urcorner$, je peux écrire $\ulcorner \neg\phi \urcorner$.
   $\wedge$**I** : si j'ai déjà ϕ et ψ, je peux écrire $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$.
   $\wedge$**E** : si j'ai déjà $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, je peux écrire ϕ et aussi écrire ψ.
   $\vee$**I** : si j'ai déjà ϕ, je peux écrire $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$; si j'ai déjà ψ, je peux écrire $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$.
   $\vee$**E** : si j'ai montré $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ et que χ s'ensuit de ϕ et également de ψ, je peux écrire χ.
   $\leftrightarrow$ **I** : si j'ai déjà $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ et $\ulcorner \psi \to \phi \urcorner$, je peux écrire $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$.
   $\leftrightarrow$ **E** : si j'ai déjà $\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$, je peux écrire $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ et aussi écrire $\ulcorner \psi \to \phi \urcorner$.

4. L'application de ces règles nous permet d'écrire des preuves des théorèmes ("$\vdash \phi$") et des séquents ("$\phi \vdash \psi$").
5. Pour avoir prouvé un théorème ou un séquent, il faut avoir déchargé toute supposition.
6. Pour établir une conclusion implicative, il convient d'utiliser PC.
7. Pour établir une conclusion négative ou une conclusion simple, il convient d'utiliser RAA.
8. Le théorème de déduction nous assure de la validité de la règle de la preuve conditionnelle.
9. La méthode de la déduction naturelle nous permet d'utiliser des règles dérivées.
10. La déduction naturelle est une méthode syntaxique qui est correcte et complète : tout séquent déductible correspond à une relation de conséquence sémantique et toute conséquence sémantique peut être déduite comme séquent.