Chapitre 7

Propriétés métalogiques de la logique propositionnelle

7.1 Les propriétés métalogiques

Dans la leçon 5 (p. 87), nous avons introduit une sémantique formelle pour le langage de la logique propositionnelle et défini la relation de conséquence sémantique $\models$. "$\phi \models \psi$" est vrai si et seulement si toute interprétation qui rend vrai "ϕ" rend également vrai "ψ". Dans les leçons 4, 5 et 6, nous avons introduit trois méthodes syntaxiques permettant de prouver des théorèmes : un calcul axiomatique, la méthode des arbres et la méthode de la déduction naturelle. Ces trois méthodes définissent trois relations syntaxiques de déductibilité $\vdash$.

La conséquence sémantique $\models$ est une relation sémantique étudiée dans la théorie des modèles. La déductibilité syntaxique $\vdash$, quant à elle, est une relation syntaxique et fait partie du domaine de la théorie de la preuve. La théorie des modèles définit la notion de validité, la théorie de la preuve celle de la déductibilité ou de la démontrabilité. Il existe différentes manières d'établir des relations entre la syntaxe et la sémantique d'un système logique. Un calcul syntaxique peut être appelé :

- **"correct"** si tous ses théorèmes sont des tautologies (cf. 90).
- **"complet"** s'il permet la déduction de toutes les tautologies (cf. 90).
- **"adéquat"** s'il est à la fois correct et complet.
- **"consistant"** s'il ne permet pas la déduction d'une contradiction (cf. p. 92).

La dernière propriété est la moins exigeante : qu'une méthode syntaxique soit *consistante* revient à dire qu'elle ne permet pas la déduction d'une phrase et de sa négation. Puisqu'une contradiction n'est jamais une tautologie, tout calcul correct est consistant. Dans la logique classique, un calcul inconsistant est dénué d'intérêt : si une seule contradiction est un théorème, toute formule propositionnelle peut en être déduite en conséquence (puisqu'une inférence ayant une prémisse contradictoire est toujours valide) – par conséquent, le calcul ne fera plus de distinction entre théorèmes et non-théorèmes et permettra la déduction de n'importe quelle phrase.

Nous démontrerons par la suite que le calcul axiomatique HC, la méthode des arbres et la méthode de la déduction naturelle sont corrects et complets (et donc adéquats). Ces résultats n'établissent pas seulement que les trois méthodes de preuves sont équivalentes, mais également qu'elles correspondent à la sémantique de la logique propositionnelle que l'on a donné dans la leçon 5.

Consistance, correction et complétude ne sont que trois des propriétés que l'on recherche dans la construction d'un calcul. Il est également désirable de pouvoir prouver un théorème de déduction sur le calcul : un tel théorème nous assure que $\phi \vdash \psi$ si et seulement si $\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$. C'est ce théorème qui justifie notre application de la règle de preuve conditionnelle PC dans la méthode de déduction naturelle.

D'autres propriétés métalogiques désirables sont sémantiques : elles ne caractérisent pas un calcul, mais une relation de conséquence sémantique ou un ensemble de tautologies :

- Une logique (un ensemble de proposition appelées "tautologies") est dite **"décidable"** s'il existe une procédure mécanique permettant de déterminer si une phrase est une tautologie.
- Une logique est dite **"compacte"** si toute conséquence sémantique d'un ensemble infini de prémisses est une conséquence sémantique d'un ensemble fini de prémisses.

Nous démontrerons que la logique propositionnelle est décidable et compacte.

Mis à part les caractérisations syntaxiques et sémantiques, une logique peut aussi être décrite comme une structure mathématique : la logique propositionnelle, par exemple, correspond à un certain type d'algèbre, à savoir une algèbre Booléenne. Après avoir introduit cette notion, nous montrerons de quelle manière les connecteurs propositionnels correspondent à des opérations algébriques.

7.2 Le théorème de déduction

Nous remarquons l'importance cruciale de la règle de la preuve conditionnelle PC dans la déduction des théorèmes avec une forme implicative ou conditionnelle. La validité de la règle de la preuve conditionnelle correspond à une propriété importante de la logique propositionnelle :

Théorème 24 (Théorème de déduction)**.** *ψ peut être déduit de ϕ si et seulement si $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ est un théorème.*

Preuve[1] Nous prouvons les deux directions de l'équivalence.

$\Longrightarrow$ Comme le théorème est évident pour la méthode de la déduction naturelle, nous le démontrons pour le calcul HC. Supposons donc que nous avons une preuve de

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^n \psi$$

Cette preuve consiste en une séquence finie de formules propositionnelles $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ telle que pour $\psi_n = \psi$ et que pour tout nombre $i < n$, ψ_n soit est un axiome ou ϕ, soit s'ensuit de deux autres formules ψ_i et ψ_j $(i, j < n)$ par MP. Nous transformons cette preuve de ψ en une preuve que $\phi \rightarrow \psi$ en faisant les modifications suivantes :

(a) Si $\psi_k = \phi$, nous remplaçons

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \rightarrow \phi$$

ce qui est un axiome ($\mathbf{H_1}$).

[1] La preuve suivante, qui se termine par le signe "□" pour "quod erat demonstrandum" ("c.q.f.d.") peut être omise par ceux qui sont peu intéressés par les subtilités des calculs axiomatiques.

(b) Si ψ_k est un axiome, nous remplaçons la ligne

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par les cinq lignes suivantes (cf. exercice (7b) de la quatrième série 16.4 à la p. 234) :[2]

$\mathbf{k_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k$	axiome
$\mathbf{k_2}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\psi_k \wedge \phi) \to \psi_k) \to (\psi_k \to (\phi \to \psi_k))$	$\mathbf{H_3}$
$\mathbf{k_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\psi_k \wedge \phi) \to \psi_k$	$\mathbf{H_8}$
$\mathbf{k_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k \to (\phi \to \psi_k)$	(MP) de (k_2) et (k_3)
$\mathbf{k_5}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_k$	(MP) de (k_1) et (k_4)

(c) Si ψ_k a été obtenu à partir de deux formules ψ_i et ψ_j $(= \ulcorner \psi_i \to \psi_k \urcorner)$ $(i, j < k)$, on applique l'hypothèse d'induction pour obtenir :

$\mathbf{i}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_i$
$\mathbf{j}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi_k)$

Nous remplaçons ces deux lignes par les suivantes :

$\mathbf{i}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_i$	
$\mathbf{j_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi_k)$	
$\mathbf{j_2}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to (\psi_i \to \psi_k)) \to ((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k)$	$\mathbf{H_4}$
$\mathbf{j_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k$	(MP) de (j_1) et (j_2)
$\mathbf{j_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \phi$	$\mathbf{H_1}$
$\mathbf{j_5}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to \phi) \to ((\phi \to \psi_i) \to (\phi \to (\phi \wedge \psi_i)))$	$\mathbf{H_{10}}$
$\mathbf{j_6}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to \psi_i) \to (\phi \to (\phi \wedge \psi_i))$	(MP) de (j_4) et (j_5)
$\mathbf{j_7}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\phi \wedge \psi_i)$	(MP) de (i) et (j_6)
$\mathbf{j_8}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to (\phi \wedge \psi_i)) \to (((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k) \to (\phi \to \psi_k))$	$\mathbf{H_2}$
$\mathbf{j_9}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\phi \wedge \psi_i) \to \psi_k) \to (\phi \to \psi_k)$	(MP) de (j_7) et (j_8)
$\mathbf{j_{10}}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_k$	(MP) de (j_3) et (j_9)

$\Longleftarrow$ Si on a

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \to \psi$$

on ajoute

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+1} \phi$$

afin d'obtenir

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+2} \psi$$

avec une application de (MP).

□

Par le théorème de déduction, trouver une déduction “$p \vdash q$” consiste à prouver “$\vdash p \to q$”. En pratique, cependant, cette réduction ne facilite que rarement le travail du logicien. D'où l'utilité de la

[2] Nous supposons que $k_1, \ldots, k_5 < k$, ce qui est toujours possible après une re-numération des lignes.

méthode de la déduction naturelle, qui ne nécessite pas une telle réduction mais qui permet de traiter "$p \vdash q$" 'directement'.

7.3 Correction et complétude de la méthode des arbres

Nous avons présenté la méthode des arbres à travers son interprétation sémantique, c'est-à-dire en termes de valeurs de vérité des phrases traitées. Cependant, les règles que nous avons proposées dans la leçon 5 sont des règles purement syntaxiques : elles ne considèrent que la forme syntaxique des phrases. Nous avons déjà présupposé la correction et la complétude de cette méthode syntaxique et c'est ce que nous devons prouver dans la section qui suit. A cette fin, nous suivons la présentation de Smullyan (1968: 25 et seq.).

Pour prouver la correction et la complétude de la méthode des arbres, nous devons introduire quelques nouvelles notions. Nous observons d'abord que nos règles pour les équivalences matérielles ne sont pas basiques, mais peuvent être obtenues par deux applications successives des règles pour l'implication matérielle. Les sept autres règles de construction d'arbres tombent sous deux catégories : certaines nous amènent à développer l'arbre avec une seule nouvelle branche, d'autres, avec deux nouvelles branches. Nous faisons donc une distinction entre les formules que l'on appellera "du type α" ($\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$) qui 'continuent sur la même branche', et les formules que l'on appellera "du type β" ($\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$) qui nous obligent à créer au moins une nouvelle branche. On adoptera la terminologie suivante pour les formules que ces règles nous obligent à écrire sur les branches consécutives :

α	α_1	α_2
$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	ϕ	ϕ
$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	ϕ	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$

β	β_1	β_2
$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	ψ

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un arbre et un tableau :

Définition 25 (Arbres binaires)**.** *Un arbre binaire est une structure composée de 'noeuds' (points) et de 'branches' (lignes) telle que chaque noeud, mis à part l'origine, se trouve à la fin d'une branche et telle que tous les noeuds se trouvent au début d'au maximum deux branches.*[3]

Nous appelons "point extrême" un point qui n'a pas de successeurs sur sa branche.

Définition 26 (Tableaux)**.** *Un tableau est un arbre binaire dont les noeuds sont des formules propositionnelles construites à partir d'une formule propositionnelle comme suit : si χ est une formule propositionnelle dont le tableau $\mathcal{T}$ a déjà été construit et que ζ en est un point extrême, nous élargissons $\mathcal{T}$ par une des méthodes suivantes :*

[3]Cette définition utilise la notion vague de "structure". Une définition plus précise serait la suivante : Un arbre est un triple $\langle \mathbf{P}, \mathbf{l}, R\rangle$ composé de
1. un ensemble $\mathbf{P}$ d'éléments appelés "points";
2. une fonction $\mathbf{l}$ qui assigne à tout point un nombre naturel appelé son "niveau";
3. une relation R entre des points appellée "x est le prédecesseur de y".

Ce triple doit satisfaire aux conditions suivantes :
1. Un seul point (appellé "l'origine") est de niveau 1.
2. Tout autre point que l'origine a un seul prédecesseur.
3. Pour toute paire de points $\langle x, y\rangle$, si x est le prédecesseur de y, alors $\mathbf{l}(y) = \mathbf{l}(x) + 1$.

(A) *Si une formule du type α a une occurrence sur le chemin B_ζ (le chemin de χ jusqu'à ζ dans $\mathcal{T}$), nous ajoutons soit α_1 soit α_2 comme successeur unique à ζ.*

(B) *Si une formule du type β a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons β_1 comme successeur gauche et β_2 comme successeur de droite à ζ.*

Nous appelons un tableau $\mathcal{T}$ une *"extension directe"* d'un autre tableau $\mathcal{T}'$ si nous l'obtenons à partir de $\mathcal{T}'$ par une seule application de **(A)** ou de **(B)**. Nous disons d'une branche B_ϕ d'un arbre qu'elle est *"fermée"* si elle contient des occurrences d'une formule propositionnelle et également de sa négation. Un tableau $\mathcal{T}$ est appelé *"fermé"* si toutes ses branches sont fermées. Nous appelons une *"preuve"* d'une formule propositionnelle ϕ un tableau fermé qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme formule initiale. Une formule ϕ est appelée *"prouvable"* s'il existe une preuve pour ϕ.

Pour la preuve de la correction, nous définissons ce qu'est une interprétation rendant vrais une branche ou un tableau :

Définition 27 (Interprétations d'un tableau)**.** *Une interprétation propositionnelle I rend vraie une branche B_ϕ d'un tableau sémantique ssi elle rend vraies toutes les formules propositionnelles qui ont des occurrences sur cette branche. I rend vrai un tableau ssi elle rend vraie au moins une branche de ce tableau.*

Nous disons d'une branche ou d'un tableau qu'ils sont "satisfaisables" s'il y a une interprétation qui les rend vrais. Nous pouvons maintenant prouver le théorème le plus important pour la preuve de la correction :

Théorème 28. *Si $\mathcal{T}_2$ est une extension directe d'un tableau $\mathcal{T}_1$, toute interprétation qui rend vraie $\mathcal{T}_1$ rend également vraie $\mathcal{T}_2$.*

Preuve Supposons que I rende vrai $\mathcal{T}_1$. Il y a donc une branche B_ϕ dans $\mathcal{T}_1$ rendue vraie par I. $\mathcal{T}_2$ se distingue de $\mathcal{T}_1$ par l'addition d'un ou de deux successeurs à une branche B_ψ de $\mathcal{T}_1$. Si B_ψ est différente de B_ϕ, alors B_ϕ est toujours une branche de $\mathcal{T}_2$ et la conclusion désirée s'ensuit. Si B_ψ a été obtenue de B_ϕ par l'opération **(A)**, alors il existe une formule α sur B_ϕ telle que B_ψ est ou bien $B_\phi + \alpha_1$ ou bien $B_\phi + \alpha_2$. Si α est rendu vrai par I, cependant, α_1 et α_2 le sont également. Alors $\mathcal{T}_2$ contient au moins une branche rendue vraie par I. Si B_ψ a été obtenue de B_ϕ par l'opération **(B)**, alors une formule β a une occurrence sur B_ϕ telle que et $B_\phi + \beta_1$ et $B_\phi + \beta_2$ sont des branches de $\mathcal{T}_2$. Si β est rendu vrai par I, alors soit la première, soit la seconde de ces deux branches est également rendue vraie par I. Donc $\mathcal{T}_2$ est rendu vrai par I. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la correction de la méthode des arbres :

Théorème 29 (Correction de la méthode des arbres)**.** *La méthode des arbres est correcte : toute phrase prouvable est une tautologie.*

Preuve Le théorème (28) nous permet de prouver par induction mathématique que, pour tout tableau $\mathcal{T}$, si l'origine ϕ est rendu vrai par une interprétation I, alors $\mathcal{T}$ est également rendu vrai par cette interprétation, assurant l'étape d'induction. Supposons alors que $\mathcal{T}$ prouve ϕ. Cela signifie que $\mathcal{T}$ est un tableau qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme origine et qui n'est rendu vrai sous aucune interprétation. Toute interprétation I, par conséquent, rend faux $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ (si elle rendait vraie l'origine, elle devrait aussi rendre vrai le tableau qui en est l'extension) : $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est vrai sous aucune interprétation : c'est une contradiction. ϕ est donc une tautologie. □

Par rapport à la complétude de la méthode des arbres, il faut distinguer deux questions :

- Pouvons-nous déduire, du fait qu'un tableau fermé existe pour ϕ, que ϕ est une tautologie ?

– Pouvons-nous être sûrs qu'un tableau fermé existe pour toute tautologie ?

Les deux questions sont indépendantes et seule la seconde correspond à celle de la complétude.[4] La question de complétude est la question de savoir si nos règles de construction d'arbres sont suffisamment puissantes pour prouver toutes les tautologies de la logique propositionnelle.

Nous appelons une branche B_ϕ *"complète"* si ces deux conditions sont remplies :

- pour toute formule α qu'elle contient, elle contient à la fois α_1 et α_2 ;
- pour toute formule β qu'elle contient, elle contient β_1 et/ou β_2.

Nous appelons un tableau *"complet"* si toute branche de ce tableau est soit fermée, soit complète. Notre but est de démontrer que

(C) Si $\mathcal{T}$ est un tableau complet et ouvert, la formule à l'origine de $\mathcal{T}$ est satisfaisable.

(**C**) veut dire que la formule d'origine d'un tableau complet qui reste ouvert est rendu vraie par au moins une interprétation – c'est-à-dire que (**C**) nous garantit qu'aucune table ne se ferme 'trop tôt'. Si nous réussissons à prouver (**C**), nous obtenons la complétude de la méthode des arbres comme suit :

Théorème 30 (Complétude de la méthode des arbres)**.** *La méthode des arbres est complète : toute tautologie est prouvable.*

Preuve Supposons que ϕ soit une tautologie. Si ϕ ne pouvait pas être prouvée par la méthode des arbres, nous pourrions construire un tableau complet pour $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ qui resterait ouvert. Par (**C**), $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ serait satisfaisable et ne serait donc pas une contradiction. Par conséquent, ϕ ne serait pas une tautologie. Puisqu'on a présupposé que ϕ est une tautologie, cette supposition doit être rejetée. ϕ est donc prouvable. □

Pour prouver (**C**), nous démontrons le théorème (31) ci-dessous, duquel (**C**) s'ensuit, puisque la satifaisabilité de toute la branche implique la satisfaisabilité de son origine.

Théorème 31. *Toute branche ouverte et complète d'un tableau est satisfaisable.*

Preuve Supposons que B_ϕ soit une branche ouverte et complète d'un tableau $\mathcal{T}$ et que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble de toutes les phrases qui ont des occurrences sur B_ϕ. Puisque B_ϕ est une branche ouverte et grâce à nos règles de construction d'arbres (**A**) et (**B**), l'ensemble $\mathcal{E}$ satisfait les trois conditions suivantes :

(a) Il n'est pas le cas que $\mathcal{E}$ contient une phrase simple "p" et sa négation "$\neg p$".
(b) Si $\alpha \in \mathcal{E}$, alors $\alpha_1 \in \mathcal{E}$ et $\alpha_2 \in \mathcal{E}$.
(c) Si $\beta \in \mathcal{E}$, alors soit $\beta_1 \in \mathcal{E}$, soit $\beta_2 \in \mathcal{E}$.

On appelle un ensemble qui satisfait ces trois conditions un "ensemble de Hintikka". Nous prouvons maintenant que tout ensemble de Hintikka est satisfaisable :[5] Nous argumentons que tout ensemble de Hintikka peut être élargi à (est un sous-ensemble d') un ensemble saturé. Un ensemble $\mathcal{E}'$ est dit *"saturé"* s'il satisfait les conditions suivantes :

(a') Pour toute phrase ϕ, soit $\phi \in \mathcal{E}'$, soit $\ulcorner \neg\phi \urcorner \in \mathcal{E}'$, mais pas les deux.
(b') Pour toute phrase du type α, $\alpha \in \mathcal{E}'$ si et seulement si $\alpha_1 \in \mathcal{E}'$ et $\alpha_2 \in \mathcal{E}'$.
(c') Pour toute phrase du type β, $\beta \in \mathcal{E}'$ si et seulement si $\beta_1 \in \mathcal{E}'$ ou $\beta_2 \in \mathcal{E}'$.

---

[4] Pour le comprendre, il suffit d'imaginer que nous renonçons à quelques-unes de nos règles de construction d'arbres. Même si la méthode devenait ainsi incomplète, la réponse à la première question serait toujours affirmative.

[5] Pour nos besoins, il suffirait de montrer la consistance de tout ensemble de Hintikka qui est *fini*.

Pour montrer qu'il y a un ensemble saturé $\mathcal{E}'$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, nous devons ajouter assez de phrases à $\mathcal{E}$

(i) pour que les implications dans (b) et (c) puissent être transformées en des équivalences dans (b') et (c')

(ii) et pour que (a) soit vraie non seulement pour les phrases simples mais pour toutes les phrases.

Supposons que $\mathcal{E}$ est un ensemble de Hintikka. Nous devons trouver une interprétation qui rende vraies toutes les phrases dans $\mathcal{E}$. Nous la définissons ainsi pour le cas particulier d'une phrase simple :

$$I(\text{“}p\text{”}) := \begin{cases} \mathbf{v} & \text{“}p\text{”} \in \mathcal{E} \\ \mathbf{f} & \text{“}\neg p\text{”} \in \mathcal{E} \\ \text{un de } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{f} & \text{“}p\text{”} \notin \mathcal{E} \ \wedge \ \text{“}\neg p\text{”} \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

Par la condition (a), il n'arrive pas que I attribue deux valeurs de vérité différentes à une seule et même phrase atomique. Comment pouvons-nous montrer que I rend vraie toute phrase dans $\mathcal{E}$? Par la méthode de l'induction mathématique, que nous avons déjà rencontrée à la p. 80. Nous attribuons à chaque phrase un degré selon la définition suivante :

Définition 32 (Degré d'une phrase)**.** *Le degré d'une phrase ϕ est le nombre naturel déterminé par les règles suivantes :*

(1) Si ϕ est une phrase atomique, alors son degré est 0.
(2) Si ϕ est une phrase niée $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et que le degré de ψ est n, alors son degré est $n+1$.
(3) Si ϕ est une conjonction $\ulcorner\psi\wedge\chi\urcorner$, une disjonction $\ulcorner\psi\vee\chi\urcorner$, une implication $\ulcorner\psi\rightarrow\chi\urcorner$ ou une équivalence $\ulcorner\psi\leftrightarrow\chi\urcorner$ et si le degré de ψ est n et que le degré de χ est m, alors le degré de ϕ est $n+m+1$.

L'utilité principale de cette définition[6] est qu'elle nous permet de prouver des méta-théorèmes déjà établis pour des cas particuliers pour toutes les formules propositionnelles par induction mathématique.

Nous démontrons alors par induction mathématique que I rend vraies toutes les phrases dans $\mathcal{E}$:

base de l'induction : Nous avons déjà vu que I rend vraies toutes les phrases simples (de degré 0) dans $\mathcal{E}$.

pas de l'induction : Supposons que I rende vraie toute phrase ϕ dans $\mathcal{E}$ de degré inférieur à n. Si ϕ est d'un degré supérieur à 0, ϕ doit être soit une formule α, soit une formule β :

- α : Si ϕ est du type α, alors α_1 et α_2 sont aussi dans $\mathcal{E}$. Mais ces formules sont d'un degré inférieur à n, donc elles sont rendues vraies par I. ϕ doit également être vrai.
- β : Si ϕ est du type β, alors soit β_1, soit β_2 est un membre de $\mathcal{E}$. Quelle qu'elle soit, elle doit être rendue vraie par I (puisqu'elle est d'un degré inférieur à n). ϕ est également rendu vrai par I.

Nous avons donc défini une interprétation qui rend vraies toutes les phrases dans $\mathcal{E}$ et, plus généralement, toutes les phrases dans un ensemble de Hintikka. Comme les phrases sur une branche ouverte et complète d'un tableau forment un tel ensemble de Hintikka, nous avons démontré le théorème.

□

[6] Voici quelques exemples : “$p\wedge(q\vee\neg r)$” est de degré 3, “$p\wedge(q\vee r)$” est de degré 2, “$p\wedge(q\wedge(r\vee\neg s))$” est de degré 4 etc.

7.4 Correction et complétude de la déduction naturelle

Pour montrer la correction et la complétude de la méthode de la déduction naturelle il faut prouver que tout séquent déductible "$\phi \vdash \psi$" correspond à une relation de conséquence sémantique "$\phi \models \psi$" (correction) et que toute instance d'une telle relation correspond à un séquent déductible à l'aide de nos douze règles de déduction naturelle (complétude). Nous ignorerons par la suite les règles d'introduction et d'élimination de l'équivalence, traitant $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ comme abréviation de $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\urcorner$. Nous suivons la procédure dans Lemmon (1965a: 75 et seq.).

Théorème 33 (Correction de la déduction naturelle)**.** *La méthode de la déduction naturelle est correcte : tout séquent déductible est une conséquence sémantique.*

Preuve Nous avons remarqué que toute preuve par la méthode de la déduction naturelle (en bref : toute déduction naturelle) doit commencer par une application de la règle de suppositions. C'est pourquoi nous pouvons prouver la correction par une induction par rapport à la longueur n d'une preuve de $\ulcorner\phi \vdash \psi\urcorner$.

base de l'induction Si la preuve a la longueur 1, il s'agit d'une application de la règle de suppositions. Le séquent en question a donc la forme $\ulcorner\phi \vdash \phi\urcorner$ et nous avons appris à la leçon 2 (cf. p. 65) que la relation de conséquence sémantique est réflexive.

pas de l'induction Supposons que nous avons montré la correction de toutes les étapes d'une preuve jusqu'à la n-ème étape et considérons l'étape numéro $n+1$. Pour montrer la correction de cette étape $n+1$, il suffit de montrer la validité des neuf différentes règles d'inférence que nous aurions pu utiliser pour y arriver.

MP : Supposons le contraire de ce que nous voulons prouver : que $\models \phi$, $\models \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$, $\vdash \psi$, mais $\not\models \psi$. Par conséquent, il existerait une interprétation I rendant vrai ϕ et $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et rendant faux ψ. Par la table de vérité de "$\rightarrow$", nous savons que cela serait impossible.

MT : L'hypothèse d'induction s'ensuit également de la table de vérité de "$\rightarrow$".

PC : Supposons que $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$, mais que $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \not\models \ulcorner\phi_{n+1} \rightarrow \psi\urcorner$. Il y aurait donc une interprétation I qui rendrait vrais tous les membres de $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, mais faux $\ulcorner\phi_{n+1} \rightarrow \psi\urcorner$. Il s'agit d'une contradiction puisqu'I, par la table de vérité de "$\rightarrow$", devrait rendrait vrai ϕ_{n+1} et rendre faux ψ et servirait donc comme contre-exemple à "$\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$".

DN : L'hypothèse d'induction s'ensuit de la table de vérité de "$\neg$".

RAA : Supposons que nous avons $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$, $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \ulcorner\neg\psi\urcorner$, mais $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \not\models \ulcorner\neg\phi_{n+1}\urcorner$. Il y aurait donc une interprétation I qui rendrait vrais tous les membres de $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, rendrait faux $\ulcorner\neg\phi_{n+1}\urcorner$ et donc rendrait vrai ϕ_{n+1}. Elle devrait donc rendre vrai et ψ et $\ulcorner\neg\psi\urcorner$, ce qui est impossible.

$\wedge$**I** : Si toute interprétation rendait vrais ϕ et ψ, alors toute interprétation rendrait également vrai $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$.

$\wedge$**E** : Si toute interprétation rendait vrai $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, alors toute interprétation rendrait également vrais ϕ et ψ.

$\vee$**I** : Si toute interprétation rendait vrai ϕ, alors toute interprétation rendrait également vrai $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$.

$\vee$**E** : Supposons le contraire de ce que nous voulons prouver : $\models \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$, $\phi \models \chi$, $\psi \models \chi$, mais $\not\models \chi$. Il y aurait donc une interprétation I qui rendrait faux χ, mais vrai $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$. Elle devrait donc rendre vrai l'un des disjoints. Or, puisqu'on a $\phi \models \chi$ et $\psi \models \chi$, elle devrait rendre vrai χ, ce qui est contraire à notre supposition initiale.

□

La complétude de la déduction naturelle nous assure que toute conséquence sémantique est déductible en tant que séquent. Pour le prouver, il nous faut le lemme suivant :

Théorème 34 (Lemme). *Soit ϕ une formule qui contient les phrases simples $p_1, \ldots, p_n$ et I une interprétation. Nous définissons des formules $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ainsi :*

$$\psi_i := \begin{cases} (\text{“}p_i\text{”}) & I(\text{“}p_i\text{”}) = \mathbf{v} \\ (\text{“}\neg p_i\text{”}) & I(\text{“}p_i\text{”}) = \mathbf{f} \end{cases}$$

Nous pouvons alors montrer par la méthode de la déduction naturelle :

1. *si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors nous pouvons déduire $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$;*
2. *si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors nous pouvons déduire $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$.*

Preuve

Nous le démontrons par une induction mathématique, utilisant la notion de degré déjà introduite :

base de l'induction Soit ϕ de degré 0 (et donc une phrase atomique). Si $I(\phi) = \mathbf{v}$, nous avons $\psi = \phi$ et $\psi \vdash \phi$ par la règle de supposition. Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, nous avons $\psi = \ulcorner\neg\phi\urcorner$ et également $\psi \vdash \neg\phi$ par la règle de suppositions.

pas de l'induction Soit ϕ de degré n.

1. Si $\phi = \ulcorner\neg\xi\urcorner$, ξ est de degré $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ et donc (par l'hypothèse de l'induction) $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$.
   - si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ et donc (par l'hypothèse de l'induction) $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \xi$. Nous obtenons $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \ulcorner\neg\neg\xi\urcorner$ par une application de (DN).
2. Si $\phi = \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{v}$. Nous avons donc, par l'hypothèse de l'induction :

     $$\begin{array}{ll} \psi_1, \ldots, \phi_m & \vdash \xi \\ \psi_{m+1}, \ldots, \psi_n & \vdash \chi \end{array}$$

     et nous devons montrer que

     $$\psi_1, \ldots, \phi_n \qquad \vdash \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$$

     qui s'ensuit par une application de ($\wedge$**I**).
   - Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ ou $I(\chi) = \mathbf{f}$. Voici les trois cas :

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \xi$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \chi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (4) par (RAA)

1	$\psi_1, \ldots, \psi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \chi$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \psi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (1) et (4) par (RAA)

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \chi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (4) par (RAA)

3. Si $\phi = \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ ou $I(\chi) = \mathbf{v}$. Dans les trois cas, nous utilisons ($\vee$**I**).
   - si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$. La déduction sera la suivante

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner, \xi$	$\vdash^* \xi$	supposition
5	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \xi$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (1) et (4) par (RAA)
6	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner, \chi$	$\vdash^* \chi$	supposition
7	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \chi$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (6) par (RAA)
8	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3, 4, 5, 6, 7) par ($\vee$**E**)
9	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (3) et (8) par (RAA)

4. Si $\phi = \ulcorner\xi \rightarrow \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ ou $I(\chi) = \mathbf{v}$. Si $I(\chi) = \mathbf{v}$, nous supposons ξ et appliquons (PC). Dans l'autre cas $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$, nous supposons χ et ξ, appliquons (PC) et enlevons la supposition que χ par (RAA).
   - si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ et $I(\chi) = \mathbf{f}$. Nous supposons $\ulcorner\xi \rightarrow \chi\urcorner$, appliquons (MP) et utilisons (RAA) pour nier la supposition.
5. Si $\phi = \ulcorner\xi \leftrightarrow \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{v}$ ou $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$. Dans ce cas, nous utilisons (PC) et puis ($\leftrightarrow$ **I**).
   - si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ et $I(\chi) = \mathbf{v}$ ou $I(\xi) = \mathbf{v}$ et $I(\chi) = \mathbf{f}$. Nous supposons $\ulcorner\xi \leftrightarrow \chi\urcorner$, appliquons ($\leftrightarrow$ **E**), appliquons (MP) et utilisons (RAA) pour nier la supposition.

Nous avons donc prouvé le lemme, c'est-à-dire démontré que : Si I est une interprétation des phrases simples contenues dans une phrase complexe, nous pouvons déduire, par la méthode de la déduction naturelle, que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ si $I(\phi) = \mathbf{v}$ et $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$ si $I(\phi) = \mathbf{f}$, pour n'importe quelle phrase ϕ. □

Le lemme nous assure que nous pouvons 'modeler' chaque ligne d'une table de vérité par les méthodes de la déduction naturelle. Nous sommes maintenant en mesure de prouver la complétude de la déduction naturelle :

Théorème 35 (Complétude de la déduction naturelle)**.** *La méthode de la déduction naturelle est complète : si ψ est une conséquence sémantique de ϕ, alors "$\phi \vdash \psi$" est déductible.*

Preuve Nous prouvons d'abord la complétude sous une forme plus 'classique' :

(Compl) Toute tautologie est déductible par la méthode de la déduction naturelle.

Pour démontrer (**Compl**), nous utilisons le lemme. Supposons que ϕ est une tautologie et que ϕ contient les phrases simples "p_1", ..., "p_n". Nous pouvons donc déduire tous les 2^n séquents de la forme $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$. Pour déduire ϕ, nous procédons ainsi :

1. Nous démontrons toutes les n disjonctions $\ulcorner\psi_i \vee \neg\psi_i\urcorner$ (en supposant qu'elles sont fausses et appliquant ($\vee$**I**) et (RAA)).
2. Nous faisons $2n$ suppositions : ψ_1, $\ulcorner\neg\psi_1\urcorner$, ψ_2, $\ulcorner\neg\psi_2\urcorner$, ... ψ_n, $\ulcorner\neg\psi_n\urcorner$.
3. Nous répétons les 2^n preuves de ϕ pour toutes les différentes interprétations possibles (ce qui est possible donné le lemme).
4. Nous appliquons $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$ fois ($\vee$**E**) et obtenons une preuve de ϕ sous aucune supposition.

Comme ϕ était une tautologie arbitraire, nous avons prouvé (**Compl**). Pour passer des théorèmes $\vdash \phi$ à des séquents arbitraires $\phi \vdash \psi$, supposons que ψ est une conséquence sémantique de $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. Nous devons donc montrer que nous pouvons prouver le séquent $\phi_1, \ldots \phi_n \vdash \psi$. Par la définition de la conséquence sémantique, nous savons que $\ulcorner\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\ldots (\phi_n \rightarrow \psi)) \ldots)\urcorner$ est une tautologie. Etant donné (**Compl**), nous pouvons le déduire également par la méthode de la déduction naturelle. Le théorème de déduction nous dit alors que nous pouvons également prouver le séquent en question. □

Voici un exemple pour illustrer le fonctionnement de la 'preuve canonique' décrite ci-dessus. Soit ϕ la tautologie "$(p \wedge q) \rightarrow p$".

1. Première étape : nous prouvons les disjonctions des atomes concernés :

1	$\vdash\ p \vee \neg p$	déjà prouvé
2	$\vdash\ q \vee \neg q$	déjà prouvé

2. Deuxième étape : supposons tous les atomes et leurs négations :

3	p	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$\neg p$	$\vdash^*\ \neg p$	supposition
5	q	$\vdash^*\ q$	supposition
6	$\neg q$	$\vdash^*\ \neg q$	supposition

3. Troisième étape : comme ϕ est une tautologie, le lemme nous montre comment dériver les quatre lignes suivantes des quatre lignes précédentes :

7	p, q	$\vdash^*\ (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
8	$p, \neg q$	$\vdash^*\ (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
9	$\neg p, q$	$\vdash^*\ (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
10	$\neg p, \neg q$	$\vdash^*\ (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme

4. Nous pouvons donc appliquer $\vee$**E** pour terminer la preuve :

11	q	$\vdash^*\ (p \wedge q) \rightarrow p$	de (1,3,7,4,9) par ($\vee$**E**)
12	$\neg q$	$\vdash^*\ (p \wedge q) \rightarrow p$	de (1,3,8,4,10) par ($\vee$**E**)
13		$\vdash\ (p \wedge q) \rightarrow p$	de (2,5,11,6,12) par ($\vee$**E**)

7.5 Correction et complétude du calcul HC

Nous avons déjà démontré la correction de HC dans la leçon 4. Si la méthode des arbres est complète et donc suffit à prouver toute tautologie, le calcul HC y suffit également. Le calcul HC hérite la complétude de la méthode des arbres.

7.6 Décidabilité et formes normales

Le problème de la décidabilité est le suivant : comment savoir si une formule donnée ϕ est une tautologie ? Comment savoir si une formule $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ est satisfaisable ? Pour répondre à ces questions, il nous faut une procédure de décision, c'est-à-dire un algorithme déterminant s'il existe ou non une interpétation qui rend vraie la phrase donnée.

Les tables de vérité nous fournissent une méthode 'brute' permettant de trouver une telle interprétation, si elle existe. Pour savoir si une phrase donnée est une tautologie, il suffit de faire sa table de vérité et vérifier si on ne trouve que des "V" dans la colonne de son connecteur principal. Le théorème suivant est donc trivial :

Théorème 36 (Décidabilité de la logique propositionnelle)**.** *La logique propositionnelle est décidable : il existe une procédure mécanique permettant de déterminer si une formule propositionnelle est ou non une tautologie.*

Preuve Toute formule propositionnelle ne contient qu'un nombre fini de phrases simples. Pour déterminer si ϕ est ou non une tautologie, il suffit de faire la table de vérité des phrases simples qu'il contient et vérifier s'il y a des "F" dans la colonne de son connecteur principal. S'il y en a pas, ϕ est une tautologie. $\square$

L'inconvénient de cette méthode est que les tables de vérité peuvent devenir très grandes. Pour une phrase complexe construite à partir de n atomes différents, il faut considérer 2^n lignes (4 pour 2, 8 pour 3, 16 pour 4, 32 pour 5, 64 pour 6 etc.). Pour une phrase contenant dix phrases simples, il faudrait faire une table de 1024 lignes !

On appelle cela le "problème de l'explosion combinatoire" que l'on rencontre lorsqu'on utilise directement la définition de la validité et qu'on vérifie, pour tout I, si $I(\phi) = \mathbf{v}$. En ne considérant que les n phrases simples apparaissant dans ϕ, le nombre de vérifications est exponentiel en n (la table de vérité pour ϕ aura 2^n lignes). Cependant, les tables de vérité suggèrent une autre méthode. Considérons la phrase complexe : $((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (\neg r \rightarrow s) \wedge (\neg p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (r \rightarrow p)$. Choisissons **A**, **B**, **C**, **D** pour les quatre conjoints, nous obtenons la table de vérité suivante (cf. p. 256) :

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\mathbf{A}$	$\neg r$	$\mathbf{B}$	$\neg p$	$q \vee r$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{D}$	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$
V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V	V	F
V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	F
F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F

Chaque ligne de cette table nous apprend que la phrase complexe prend la valeur "V" ou "F" selon la valeur des atomes sur la ligne en question. L'expression "$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$" est donc vraie si et seulement si "p", "q", "r" et "s" sont tous vrais (1ère ligne) ***ou*** si "p", "q" et "r" sont vrais et "s" est faux (2ème ligne) ***ou*** si "p" et "q" sont vrais et "r" et "s" faux (3ème ligne) ***ou*** si "p", "r" et "s" sont vrais et "q" faux (5ème ligne) ***ou*** si "p" et "r" sont vrais et "q" et "s" sont faux (6ème ligne) ***ou*** si "p" et "s" sont vrais et "q" et "r" sont faux (7ème ligne). En traduisant cette observation en langue formelle, nous obtenons :

(1) $$(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \\ \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s)$$

Cette expression a une forme particulière :

- les négations n'apparaissent que devant des phrases simples ;
- l'expression est une disjonction de conjonctions ;
- chaque disjoint correspond à une ligne de la table de vérité où la phrase entière est vraie.

On appelle des phrases ayant cette forme des *formes normales disjonctives.*

Si nous considérons un grand ensemble de formules bien formées d'une certaine langue et que nous essayons de déterminer des propriétés communes à ces formules (par exemple : nous voulons savoir si toutes les formules dérivables dans un certain calcul sont valides), il est important de savoir si on peut présupposer quelque chose sur la *forme* de ces formules. Ainsi se justifie l'intérêt de ce qu'on appelle des *"formes normales"*. Ces formes normales sont définies de manière syntaxique.

Pour définir des formes normales, nous utilisons l'interdéfinissabilité des connecteurs (cf. p. 65). Commençons par la *forme normale négative*. Une formule ϕ est de forme normale négative si et seulement si soit elle est de la forme p ou $\neg p$ pour une phrase atomique p, soit elle est une disjonction ou une conjonction des formules de forme normale négative. Pour former la forme normale négative d'une formule, on 'pousse' la négation 'à l'intérieur' de la formule en appliquant, successivement, les règles suivantes :

règle 1	$\phi \leftrightarrow \psi$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$
règle 2	$\phi \rightarrow \psi$	$\rightsquigarrow$	$\neg\phi \vee \psi$
règle 3	$\neg(\phi \wedge \psi)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\phi \vee \neg\psi$
règle 4	$\neg(\phi \vee \psi)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\phi \wedge \neg\psi$
règle 5	$\neg\neg\phi$	$\rightsquigarrow$	ϕ

Le résultat obtenu par l'application de ces règles est équivalent (sémantiquement) à la formule initiale, c'est-à-dire qu'il a la même table de vérité.

Théorème 37. *Si ϕ est une formule propositionnelle, il existe une formule ψ de forme normale négative qui est sémantiquement équivalente à ϕ.*

Preuve Par une application des règles données, ne passant à la règle suivante que lorsque la règle antécédente n'est plus applicable. □

Un exemple d'une telle transformation en forme normale négative est la chaîne d'équivalences suivante :

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$		
	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow r$	règle 1
	$\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r$	règle 2
	$\neg((\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r$	règle 2
	$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r$	règle 2
	$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r$	règle 3
	$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r$	règle 4
	$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \vee r$	règle 4
	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r$	règle 5

Le résultat est en forme normale négative car tous les signes de négations se trouvent devant des phrases atomiques.

La forme normale négative nous permet de construire des formes normales conjonctives :

Définition 38. *Une formule est en forme normale conjonctive si elle est une conjonction de disjonctions de phrases atomiques et de négations de phrases atomiques.*[7]

L'importance de cette notion vient du fait que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule de forme normale conjonctive :

Théorème 39. *Si ϕ est une formule propositionnelle, il existe une formule ψ de forme normale conjonctive sémantiquement équivalente à ϕ.*

Preuve Pour transformer une formule de forme normale conjonctive, on applique successivement les règles suivantes :

règles 1 – 5	ϕ	$\rightsquigarrow$	forme normale négative de ϕ
règle 6	$(\phi \wedge \psi) \vee \chi$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$
règle 7	$\chi \vee (\phi \wedge \psi)$	$\rightsquigarrow$	$(\chi \vee \phi) \wedge (\chi \vee \psi)$
règle 8	$\phi \vee (\psi \vee \chi)$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \vee \psi) \vee \chi$
règle 9	$\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi$

Il est évident que le résultat obtenu par l'application de ces règles est équivalent (sémantiquement) à la formule initiale, c'est-à-dire qu'il a la même table de vérité. □

[7] Voici la notation formelle :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \;:=\; \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$$

pour des ensembles finis de formules $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. On appelle alors un 'littéral' une formule qui est soit une phrase atomique (= de la forme "p"), soit la négation d'une phrase atomique (= de la forme "$\neg p$"). On a pour une formule ϕ :

$$\phi \text{ est de forme normale conjonctive} \quad :\Longleftrightarrow \quad \phi \text{ est de la forme } \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$$

pour des nombres naturels m et $n_1, \ldots n_m$ et des littéraux $L_{i,j}$ tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n_i$.

Un exemple d'une telle transformation en forme conjonctive est la chaîne d'équivalences suivante :

$((p \vee \neg q) \rightarrow ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	
$(\neg(p \vee \neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 2
$((\neg p \wedge \neg\neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 4
$((\neg p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 5
$((\neg p \wedge q) \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 6
$((\neg p \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t)))) \wedge \neg u$	règle 6
$((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 7
$((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 7
$((\neg p \vee r) \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge ((q \vee s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t) \wedge ((q \vee r) \vee t)) \wedge ((q \vee s) \vee t) \wedge \neg u$	règle 9

Nous voyons que les règles 8 et 9 ne servent qu'à grouper les conjonctions ou disjonctions de manière uniforme du côté gauche de telle sorte qu'on puisse, selon notre convention, omettre les parenthèses. Le résultat final de notre transformation est donc la formule :

$$(\neg p \vee r \vee t) \wedge (\neg p \vee s \vee t)) \wedge (q \vee r \vee t) \wedge (q \vee s \vee t) \wedge \neg u$$

L'intérêt des formes normales conjonctives vient du fait qu'il est très facile de tester – mécaniquement – si une formule de forme normale conjonctive est valide : il suffit que tous ses conjoints soient valides ; mais ces conjoints sont des disjonctions – et pour qu'une disjonction soit valide, il faut qu'au moins une phrase atomique soit à la fois affirmée et niée dans la disjonction. La formule considérée n'est donc pas valide, mais cette autre l'est :

$$(\neg p \vee r \vee p) \wedge (\neg t \vee s \vee t)) \wedge (q \vee \neg q \vee t) \wedge (q \vee s \vee \neg s)$$

Il est également possible de définir une forme normale disjonctive : une formule est en *forme normale disjonctive* si elle est une disjonction de conjonctions de phrases atomiques et de leurs négations.[8] La forme normale disjonctive d'une formule revient à énumérer, en les ajoutant les uns aux autres par la disjonction, les cas de vérité de la phrase complexe en question, comme sa table de vérité l'indique. Par exemple, la table de vérité d'une implication matérielle indique que celle-ci est vraie si et seulement si l'on a "p" et "q" vrais, ou "p" faux et "q" vrai, ou encore "p" et "q" les deux faux – la forme disjonctive

[8] Voici la notation formelle :

$$\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i \;:=\; \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$$

Alors on a, pour une formule ϕ :

$$\phi \text{ est en forme normale disjonctive} \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \phi \text{ est de la forme } \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} L_{i,j}\right)$$

Dans les règles, il faut remplacer les règles 6 et 7 par les suivantes :

$$\begin{array}{lcl} (\phi \vee \psi) \wedge \chi & \rightsquigarrow & (\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi) \\ \chi \wedge (\phi \vee \psi) & \rightsquigarrow & (\chi \wedge \phi) \vee (\chi \wedge \psi) \end{array}$$

d'une implication "$p \to q$" sera donc "$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$".

7.7 La compacité de la logique propositionnelle

Nous avons défini la conséquence logique et la déductibilité avec des ensembles de prémisses qui sont potentiellement infinis. Nous pouvons donc maintenant nous demander si la consistance d'un ensemble infini de phrases peut être réduite à celle d'un sous-ensemble fini. Le théorème de compacité répond par l'affirmative à cette question :

Théorème 40. *La logique propositionnelle est compacte : $\Gamma \models \phi$ si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que $\Gamma' \models \phi$.*

Par conversion, ce théorème nous apprend que si tous les sous-ensembles Γ' d'un ensemble Γ sont satisfaisables, alors Γ sera également satisfaisable. Les différentes interprétations qui rendent vraies les différents sous-ensembles finis peuvent être combinées en une interprétation qui rende vraies toutes les phrases dans l'ensemble infini. Pour la preuve du théorème de compacité par la méthode de tableaux analytiques, nous prouvons, suivant Lemmon (1965a: 30 et seq.) d'abord un résultat qui s'applique à des arbres quelconques.

Nous disons d'un arbre qu'il est "généré de manière finie" si et seulement si chaque noeud dans l'arbre n'a qu'un nombre fini de successeurs. Tous les arbres binaires, par exemple, sont donc des arbres générés de manière finie. Une branche est dite "infinie" si et seulement si elle contient un nombre infini de noeuds. Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 41 (Le lemme de König)**.** *Si un arbre qui est généré de manière finie contient un nombre infini de noeuds, il contient une branche infinie.*

Preuve Appelons un noeud 'sympa' si et seulement s'il y a un nombre infini de noeuds comme successeurs et 'méchant' dans le cas inverse. Par l'antécédent de l'implication, il y a un nombre infini de noeuds et ils sont tous des successeurs de l'origine. L'origine est donc sympa. Nous observons aussi que si tous les successeurs d'un noeud sont méchants, alors ce noeud doit aussi être méchant (puisque l'arbre est généré de manière finie). Par conséquent, l'origine doit avoir un successeur sympa, qui, à son tour, a un successeur sympa et ainsi de suite. Puisque tout noeud sympa doit avoir un successeur sympa, nous générons ainsi une branche infinie.[9] □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la compacité de la logique propositionnelle :

Preuve Soient tous les sous-ensembles finis d'un ensemble Γ satisfaisables. Supposons que Γ nous soit donné comme une séquence (et non seulement comme un ensemble) de formules propositionnelles $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots\}$ étant telle que, pour tout n, l'ensemble $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ est satisfaisable. Cela est possible parce qu'il s'agit d'un sous-ensemble de Γ. Construisons le tableau analytique pour ϕ_1. Ce tableau ne peut pas être fermé puisque ϕ_1 est satisfaisable. Nous ajoutons maintenant ϕ_2 à chaque branche ouverte et continuons le tableau. Cette procédure nous donne un tableau qui doit également être ouvert, puisque $\{\phi_1, \phi_2\}$ est satisfaisable. Nous ajoutons ϕ_3, puis ϕ_4 et ainsi de suite. Nous obtenons un arbre généré de manière finie qui contient un nombre infini de noeuds (toutes les phrases dans Γ). Cet arbre doit contenir une branche infinie, par le lemme de König. Cette branche doit être ouverte et elle contient toutes les phrases dans Γ. □

[9] Pour les arbres non-ordonnés (qui sont tels que les successeurs d'un noeud ne forment pas une séquence mais seulement un ensemble) nous avons besoin de l'axiome de choix de la théorie des ensembles.

Points à retenir

1. Un système d'axiomes ou une théorie sont consistants s'ils ne permettent pas la déduction d'une contradiction.
2. Un calcul ou une méthode de preuve syntaxique est correct si tout théorème est une tautologie.
3. Un calcul ou une méthode de preuve syntaxique est complet si toute tautologie est un théorème.
4. Le calcul axiomatique HC, la méthode des arbres et le système de déduction naturelle sont tous corrects et complets.
5. Nous avons les correspondances :

ϕ est une conséquence syntaxique de Th	$\Longleftrightarrow$	ϕ s'ensuit de Th
ϕ est satisfaisable	$\Longleftrightarrow$	ϕ est consistant
ϕ est une contradiction	$\Longleftrightarrow$	ϕ est inconsistant
ϕ est une tautologie	$\Longleftrightarrow$	$\ulcorner \neg\phi \urcorner$ est inconsistant
$\ulcorner \phi$ donc $\psi \urcorner$ est un argument valide	$\Longleftrightarrow$	$\ulcorner \phi \wedge \neg\psi \urcorner$ est inconsistant

6. Par rapport à nos calculs syntaxiques, nous pouvons prouver un théorème de déduction : ψ peut être déduit de ϕ si et seulement si l'implication $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est prouvable. Le théorème de déduction nous assure de la validité de la règle de la preuve conditionnelle.
7. La logique propositionnelle est décidable : il existe une procédure mécanique qui permet de déterminer si une phrase est ou non une tautologie.
8. Toute formule de la logique propositionnelle est sémantiquement équivalente à des formules en forme normale négative, conjonctive et disjonctive. La forme normale disjonctive d'une formule 'encode' sa table de vérité : chaque disjoint correspond à une ligne où elle reçoit la valeur de vérité "V".
9. La logique propositionnelle est compacte : toute conséquence sémantique d'un ensemble infini de phrase s'ensuit déjà d'un ensemble fini.
10. La compacité s'ensuit du lemme de König qui dit qu'un arbre qui n'a que des branchements finis ne peut être infini que s'il contient une branche infinie.