Chapitre 9

La logique des prédicats

9.1 Quelques inférences valides de la logique des prédicats

La logique propositionnelle nous permet de formaliser des inférences qui reposent sur le comportement logique des connecteurs propositionnels. Ces connecteurs relient des phrases et en forment des phrases complexes. Dans le langage naturel, cependant, il est également possible de formuler d'autres inférences que la tradition a également considérées comme inférences logiques. En voici quelques exemples :

(1)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les hommes sont mortels.}\\ \text{Tous les philosophes sont des hommes.}\end{array}}{\text{Tous les philosophes sont mortels.}}$$

(2)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun philosophe n'est méchant.}\\ \text{Quelques logiciens sont des philosophes.}\end{array}}{\text{Quelques logiciens ne sont pas méchants.}}$$

(3)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Aucun homme n'est parfait.}\\ \text{Tous les philosophes sont des hommes.}\end{array}}{\text{Aucun philosophe n'est parfait.}}$$

Dans les trois cas, nous retrouvons toutes les caractéristiques des inférences logiques : la validité de ces inférences ne semble dépendre que de quelques mots qu'on peut appeler "logiques", comme "tous", "aucun" et "quelques"; toutes les inférences ayant la même forme que (1), (2) et (3) sont également valides ; et leur validité ne dépend pas du fait qu'il y ait ou non des êtres humains immortels ou parfaits ou des philosophes méchants.

La logique propositionnelle ne nous permet pas d'expliquer la validité de ces inférences, car elle ne prend pas en compte la structure interne des phrases simples qu'elle traite : elle traite les "p" et les "q" comme atomes et n'en analyse pas la structure interne. L'inférence (1), par exemple, serait formalisée comme "p ; q ; donc, r" – ce qui ne correspond pas à un schéma d'inférences valide de la logique propositionnelle.

Pour formaliser les trois inférences et expliquer leur validité, il faut utiliser la notion de prédicat.

Soit "H" une abréviation pour "... est un homme", "M" pour "... est mortel" et "P" pour "... est un philosophe" (où les lacunes indiquent les places où il faudrait insérer un nom pour obtenir une phrase). Étant donné ces abréviations, nous sommes en mesure de représenter (1) comme suit :

(4)
$$\frac{\text{Tous les } H \text{ sont des } M. \quad \text{Tous les } P \text{ sont des } H.}{\text{Tous les } P \text{ sont des } M.}$$

Peu importe ce que nous substituons pour "H", "P" et "M" : nous obtenons des inférences valides, comme, par exemple, la suivante :

(5)
Tous les animaux sont maudits.
Tous les pingouins sont des animaux.

Tous les pingouins sont maudits.

Nous avons utilisé "H", "P" et "M" pour remplacer des prédicats. Mais qu'est-ce qu'un prédicat ? Observons d'abord qu'il n'y a pas de différence, d'un point de vue logique, entre "Aucun homme n'est parfait", "Il n'y a pas d'homme parfait" et "Aucun homme n'est une chose parfaite". Nous n'utilisons donc pas la notion grammaticale de "prédicat". On remarque aussi que les prédicats substitués à la place de "H", "P" et "M" peuvent être de complexité quelconque. Non seulement (1), mais l'argument suivant est également valide :

Tous les amis de mon grand-père qui vit en Australie sont soit des kangourous, soit des admirateurs de la lune.
Tous les pingouins qui ne sont ni roses ni employés par Microsoft sont des amis de mon grand-père qui vit en Australie.
---
(6) Tous les pingouins qui ne sont ni roses ni employés par Microsoft sont soit des kangourous, soit des admirateurs de la lune.

Il est important de ne pas confondre un prédicat (dans le sens que la logique donne à ce terme) avec le terme général qu'il peut contenir. "Pingouin", par exemple, est un terme général, mais le prédicat correspondant est "... est un pingouin" – le prédicat est ce qui, avec un nom, forme une phrase.[1] Nous pouvons obtenir un prédicat à partir de n'importe quelle phrase, en remplaçant au moins un nom dans cette dernière par trois points. De la phrase

(7) Robert est l'animal préféré de Sam.

nous obtenons les prédicats "... est l'animal préféré de Sam", "Robert est l'animal préféré de ..." (ce qui, pour des raisons de lisibilité, est parfois transformé en "... est tel que Robert est son animal préféré") et finalement aussi le prédicat binaire "... est un animal préféré de $\cdots$". Nous reviendrons plus tard sur les particularités de ce troisième prédicat.

La caractéristique logique la plus importante des prédicats est qu'ils peuvent être dits *vrais de* certaines choses. Le prédicat "... est un pingouin", par exemple, est vrai de tous les pingouins et n'est vrai de rien d'autre. Nous appellerons l'ensemble de toutes les choses dont un prédicat est vrai *l'extension* de ce prédicat. L'extension du prédicat "... est un pingouin", par exemple, est l'ensemble de tous les pingouins, l'extension du prédicat "... est un pingouin heureux" est l'ensemble de tous les pingouins heureux (qui est un sous-ensemble de l'ensemble de tous les pingouins) et ainsi de suite. L'extension d'un prédicat peut contenir un seul ou même aucun membre. L'extension de "... est un satellite de la terre" ne contient que la lune, et l'extension de "... est une licorne" est l'ensemble vide $\emptyset$.

[1] C'est pour cette raison que nous appelons les prédicats "prédicatifs" ou, suivant Frege, "insaturés".

L'extension joue le même rôle pour les prédicats que la valeur de vérité pour les phrases : dans une logique extensionnelle, on ne s'intéresse qu'aux extensions des prédicats, aux dénotations des termes singuliers et à la valeur de vérité des phrases. En logique des prédicats, une phrase singulière simple sera vraie si et seulement si la dénotation (ou le référent) du terme singulier appartient à l'ensemble qui est l'extension du prédicat. "Sam est un pinguin heureux", par exemple, est vrai si et seulement si Sam (le référent de "Sam") est un membre de l'ensemble de tous les pingouins heureux (qui est l'extension du prédicat "x est un pingouin heureux").

9.2 Être vrai et être vrai de

Pour dire qu'une phrase ouverte est satisfaite par (ou vraie d') un certain individu, nous formons ce que nous appellerons une *"phrase singulière"*. Une phrase singulière est une phrase qui contient un nom d'au moins un individu particulier et prédique un prédicat de cet individu (ou une relation de plusieurs individus).[2] Pour dire que Sam est triste, par exemple, nous disons que Sam satisfait la phrase ouverte "... est triste" ou que cette phrase ouverte est vraie de Sam. Pour désigner Sam nous utilisons dans la logique des prédicats ce qu'on appelle une *"constante individuelle"*, par exemple "a". Pour dire que a satisfait la phrase ouverte "Fx", nous appliquons la fonction représentée par "Fx" à un argument, représenté par une constante individuelle :

(8) Fa

(8) est la forme générale d'une phrase simple dans la logique des prédicats et consiste de trois éléments : un constante individuelle (un terme singulier, "a"), un prédicat ("Fx"), et l'application de la fonction dénotée par "Fx" à l'argument a (représentée par la juxtaposition de "F" et "a").

Selon son interprétation fregéenne, la phrase singulière (8) désigne la valeur de la fonction Fx pour l'argument a – comme les prédicats sont des fonctions d'individus à des valeurs de vérité, cette valeur est **v**, le Vrai, si Sam est triste, et elle est **f**, le Faux, s'il n'est pas le cas que Sam est triste.

Il y a cependant d'autres phrases que les phrases singulières. Quand je dis que tous les pingouins sont heureux, par exemple, ou qu'il y a un philosophe irlandais, je ne parle d'aucun pingouin et d'aucun philosophe en particulier. Il n'y a pas d'individu spécifique dont je prédique être un pingouin heureux ou un philosophe irlandais. Nous appellerons de telles phrases qui ne sont pas singulières des *"phrases générales"*.

C'est pour le traitement des phrases générales que nous utilisons des quantificateurs et des variables. Pour dire que le prédicat "x est un philosophe irlandais" est vrai d'au moins une chose, je quantifie existentiellement sur l'occurrence de la variable "x" dans cette phrase ouverte, obtenant "$\exists x(x$ est un philosophe irlandais". Pour dire que le prédicat "x est heureux" est vrai de tous les pingouins, je coordonne l'occurrence de "x" dans "x est un philosophe irlandais" avec l'occurrence de "x" dans "x est un pingouin" en quantifiant les *deux* occurrences par le *même* quantificateur : "$\forall x(x$ est un pingouin $\rightarrow x$ est heureux)".

Utilisant les mêmes signes que pour les connecteurs propositionnelles, nous pouvons former des prédicats complexes à partir des prédicats simples, remplaçant les conditions de vérité (pour des phrases)

[2]Nous appelons "individu" n'importe quelle chose dénotée par une constante individuelle. Même si normalement nos individus sont des "substances premières" dans le sens Aristotélicien du terme (Sam, sa maison, ses dents et le bout de viande qui se trouve entre eux), rien ne nous empêche de traiter comme individus des évènements (son mariage), des tropes (la blancheur non-répétable de son visave), des espèces (homo sapiens sapiens) ou substances secondes (l'humanité).

par des conditions de satisfaction (pour des prédicats) :[3]

C¬ : Un objet a satisfait "$\neg Fx$" si et seulement si a ne satisfait pas "Fx".

C∧ : Un objet a satisfait "$Fx \wedge Gx$" si et seulement si a satisfait "Fx" et a satisfait "Gx".

C∨ : Un objet a satisfait "$Fx \vee Gx$" si et seulement si soit a satisfait "Fx", soit a satisfait "Gx".

C → : Un objet a satisfait "$Fx \rightarrow Gx$" si et seulement si soit a ne satisfait pas "Fx", soit a satisfait "Gx".

C ↔ : Un objet a satisfait "$Fx \leftrightarrow Gx$" si et seulement si soit a satisfait "Fx" et "Gx", soit ne satisfait ni "Fx" ni "Gx".

Au niveau de leurs extensions, ces conditions de satisfaction correspondent à des opérations entre des ensemble : la négation d'un prédicat aura comme extension le *complément* du prédicat nié, la conjonction l'intersection des extensions des deux disjoints et la disjonction leur union.

Comme les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses, mais seulement vraies ou fausses *de* certains objets, la sémantique des connecteurs qui les relient ne peut pas être donnée par des tables de vérité. C'est pourquoi nous utilisons un autre concept fondamental de la sémantique, celui de satisfaction, pour expliquer leur signification : la condition **C∧**, par exemple, donne la signification (c'est-à-dire les conditions de satisfaction) du prédicat complexe "$Fx \vee Gx$" sur la base de la signification (les conditions de satisfactions) des deux prédicats simples "Fx" et "Gx".[4]

La condition **C¬** à une importance particulière. C'est elle qui garantit que nos prédicats (comme nous l'avons déjà remarqué à la p. 154) sont entièrement définis : que pour tout objet dont nous voulons parler, le prédicat en question est ou bien vrai de cet objet ou bien faux de cet objet. Ceci nous oblige, par exemple, de compter comme faux des phrases comme "César est impair", et comme vrai des phrases comme "Il n'est pas le cas que César est impair" et "Soit César est impair soit il ne l'est pas".

9.3 La formalisation dans la logique des prédicats

La combinaison avec un nom n'est pas la seule manière dont une phrase ouverte peut devenir une phrase et être vraie ou fausse. Considérons les phrases suivantes :

A1 Tous les philosophes sont mortels.

B1 Il n'y a rien d'entièrement noir qui est entièrement rouge.

C1 Quelques pingouins sont heureux.

D1 Quelques animaux ne sont pas des pingouins.

Les phrases **A1** à **D1** sont complètes mais ne contiennent pas de nom : elles expriment des phrases générales (qui correspondent aux quatre types de phrases catégorielles étudiés en syllogistique). Nous discernons des connecteurs, par exemple une négation dans **D1**. Ces connecteurs, cependant, ne relient pas des phrases entières mais des prédicats, des phrases ouvertes. Quels sont les connecteurs dans **A1** et **B1** ? Les réformulations suivantes nous montrent qu'il s'agit des implications (**A1** et **B1**) et des conjonctions (**C1** et **D1**) :

A2 Si quelqu'un est un philosophe, alors il est mortel.

B2 Si une chose est entièrement noir, alors elle n'est pas entièrement rouge.

[3] Nous ferons ceci avec beaucoup plus de rigueur dans le ch. 10.2, utilisant la notion clé d'"interprétation".

[4] Comme dans le cas des phrases, nous voulons à strictement parler donner les conditions de satisfaction pour *n'importe quel* prédicat conjonctif, quoi que soit sa complexité logique. C'est pourquoi nous utiliserons des lettres grecques ("$\phi(x)$", "$\psi(x, y)$" etc.) dans notre traitement rigoureux dans la prochaine leçon.

C2 Il y a au moins un pingouin et il est heureux.

D2 Il y a au moins un animal et il n'est pas un pingouin.

A2 à **D2** nous montrent également que les phrases ouvertes liées par des connecteurs ne peuvent pas être évaluées de manière indépendante des autres, puisqu'elles contiennent des pronoms ("il" dans **A2**, **C2** et dans **D2**, "elle" dans **B2**) qui dépendent, pour leurs valeurs sémantiques, de leurs antécédents dans le reste de la phrase. Ces pronoms, comme nous le verrons plus tard, correspondent à des variables dont les valeurs sont coordonnées par le quantificateur qui les gouverne.

Si nous interprétons nos phrases modèles à l'aide de la notion de satisfaction, nous obtenons les phrases métalinguistiques suivantes :

A3 Toutes les choses qui satisfont "... est un philosophe" satisfont également "... est mortel".

B3 Toutes les choses qui satisfont "... est entièrement noir" ne satisfont pas "... est entièrement rouge".

C3 Il y a des choses qui satisfont "... est un pingouin" et "... est heureux".

D3 Il y a des choses qui satisfont "... est un animal", mais qui ne satisfont pas "... est un pingouin".

Toutes ces phrases commencent par une tournure que nous appellerons "quantificateur" : pour exprimer des quantificateurs, nous préférons normalement les tournures suivantes, qui réduisent le nombre de tournures 'logiques' de quatre ("tous", "quelques", "aucun", "quelques ne ... pas") à deux ("tous" et "il y a") :

A4 Tout ce qui est un philosophe est mortel.

B4 Tout ce qui est entièrement noir n'est pas entièrement rouge.

C4 Il y a des pingouins heureux.

D4 Il y a des animaux qui ne sont pas des pingouins.

Suivant le modèle de **A2** à **D2**, nous pouvons introduire des variables pour remplacer les pronoms et rendre perspicace la manière dont les phrases ouvertes sont liées par des connecteurs :

A5 Pour tout x, si x est un philosophe, alors x est mortel.

B5 Pour tout x, si x est entièrement noir, alors x n'est pas entièrement rouge.

C5 Il y a des x tels que x est un pingouin et x est heureux.

D5 Il y a des x tels que x est un animal et x n'est pas un pingouin.

Nous retrouvons des connecteurs propositionnels ("$\rightarrow$" dans (**A5**) et (**B5**), "$\wedge$" dans (**C5**) et (**D5**), "$\neg$" dans (**B5**) et (**D5**)) qui ne relient pas des phrases, mais des phrases ouvertes. Le résultat de leur application à des phrases ouvertes est une autre phrase ouverte, logiquement complexe – les connecteurs propositionnels forment des prédicats complexes à partir de prédicats plus simples.

Bien qu'elles ne contiennent pas de noms, les phrases (**A1**) à (**D1**) (et (**A2**) à (**D2**) etc.) sont néanmoins complètes : elles peuvent être vraies ou fausses et n'ont pas besoin d'être complétées par des noms. Le mécanisme qui en est responsable est appelé *"quantification"* et représenté par les deux tournures "pour tout" (abrégée par "$\forall$" et appelée "quantificateur universel") et "il existe au moins un" (abrégée par "$\exists$" et appelée "quantificateur existentiel").[5] Ces quantificateurs prennent une phrase ouverte et forment une phrase complète, exprimant que tous ou certains objets satisfont les phrases ouvertes en question. La traduction de nos exemples serait la suivante :

A6 $\forall x$ (si x est un philosophe, alors x est mortel)

[5] Il existe d'autres manières d'abréger les quantificateurs. Pour le quantificateur universel, on utilise parfois "$(x)(\ldots x \ldots)$", "$\bigvee x(\ldots x \ldots)$" et, en la notation dite "polonaise", "$\Pi x(\ldots x \ldots)$" au lieu de "$\forall x(\ldots x \ldots)$". Pour le quantificateur existentiel, on trouve "$E(x)(\ldots x \ldots)$", "$\bigwedge x(\ldots x \ldots)$" et "$\Sigma x(\ldots x \ldots)$" à la place de "$\exists x(\ldots x \ldots)$".

B6 $\forall x$ (si x est entièrement noir, alors x n'est pas entièrement rouge)

C6 $\exists x$ (x est un pingouin et x est heureux).

D6 $\exists x$ (x est un animal et x n'est pas un pingouin)

En introduisant les connecteurs et en abrégeant les prédicats, nous obtenons les phrases suivantes comme résultat final de notre essai de formalisation :[6]

A7 $\forall x\,(\mathbf{Ph}(x) \rightarrow \mathbf{M}(x))$

B7 $\forall x\,(\mathbf{noir}(x) \rightarrow \neg\mathbf{rouge}(x))$

C7 $\exists x\,(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{H}(x))$

D7 $\exists x\,(\mathbf{A}(x) \wedge \neg\mathbf{P}(x))$

Nous observons que nous pouvons appliquer les transformations habituelles aux connecteurs reliant les phrases ouvertes. Les lois de Morgan, la définition de "$\rightarrow$" en termes de "$\vee$" et de "$\neg$" et l'élimination de la double négation nous assurent, par exemple, que les phrases suivantes sont sémantiquement équivalentes aux phrases **A7**, **B7**, **C7** et **D7** respectivement :

A8 $\forall x\,\neg(\mathbf{Ph}(x) \wedge \neg\mathbf{M}(x))$

B8 $\forall x\,\neg(\mathbf{noir}(x) \wedge \mathbf{rouge}(x))$

C8 $\exists x\,\neg(\neg\mathbf{P}(x) \vee \neg\mathbf{H}(x))$

D8 $\exists x\,\neg(\neg\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{P}(x))$

Il est important de distinguer les négations internes, qui portent sur les phrases ouvertes, des négations externes, qui portent sur des phrases complètes. Qu'est-ce qui arrive si nous ajoutons des négations externes à ces phrases ? La négation de **A8**, par exemple, dirait qu'il n'est pas le cas que tous les x sont tels qu'ils sont ni philosophes ni immortels – qu'il y a, par conséquent, au moins un x qui n'est ni philosophe ni immortel. La négation de **C8** dirait qu'il n'y a pas de x qui ne satisfait pas la phrase ouverte "x n'est pas un pingouin ou x n'est pas heureux" – et donc que tous les x la satisfont, que tous les x sont soit autre que des pingouins, soit ne sont pas heureux.

Dans le langage de la logique de prédicats, nous distinguons les variables telles que "x", "y", "z", ... des constantes individuelles telles que "a", "b", "Maria", "Sam". La différence est que "a" et "Maria" dénotent un individu particulier, tandis que "x" et "y" dénotent des individus "arbitraires".[7] Dans le langage ordinaire, les pronoms, les expressions anaphoriques et des expressions comme "tel que" correspondent aux variables. La formalisation d'une phrase du langage ordinaire dans la logique des prédicats se fait donc en deux étapes :

1. Nous construisons d'abord une phrase synonyme qui représente plus clairement la forme logique de la phrase initiale :

"Tout existe."	$\rightsquigarrow$	"Toute chose est telle qu'elle existe."
"Tout homme est mortel."	$\rightsquigarrow$	"Tout est tel que si c'est un homme, il est mortel."
"Sam entre et rit."	$\rightsquigarrow$	"Il y a quelque chose tel que cette chose est Sam et cette chose entre et rit."

2. Nous introduisons ensuite des variables pour rendre ces dépendances encore plus explicites :

[6] Nous utilisons "$\mathbf{Ph}(x)$" pour "... est un philosophe", "$\mathbf{M}(x)$" pour "... est mortel", "$\mathbf{rouge}(x)$" pour "... est entièrement rouge", "$\mathbf{noir}(x)$" pour "... est entièrement noir", "$\mathbf{A}(x)$" pour "... est un animal", "$\mathbf{P}(x)$" pour "... est un pingouin" et "$\mathbf{H}(x)$" pour "... est heureux".

[7] Nous reviendrons sur cette notion problématique d'"individu arbitraire" au ch. 11.4.

$$\begin{array}{rcl}\text{“Toute chose est telle qu'elle existe.”} & \rightsquigarrow & \forall x(x \text{ existe})\\ \text{“Tout est tel que si c'est un homme, il est mortel.”} & \rightsquigarrow & \forall x(x \text{ est un homme} \rightarrow x \text{ est mortel})\\ \text{“Il y a qqch. tel qui est Sam, entre et rit.”} & \rightsquigarrow & \exists x(x = \text{Sam} \wedge x \text{ entre} \wedge x \text{ rit})\end{array}$$

Nous remarquons une équivalence sémantique propre aux quantificateurs : dire que tous les pingouins sont heureux revient à dire qu'il n'y a pas de pingouins qui ne sont pas heureux ; dire qu'il y a des pingouin romantiques revient à dire qu'il n'est pas le cas qu'aucun pingouin n'est romantique. Tous les F sont G si et seulement s'il n'y a pas de F qui n'est pas G. Il y a un F si seulement s'il n'est pas le cas que toutes les choses soient $\neg F$. Une phrase de la même forme que "$\forall x(\ldots x \ldots)$" est donc équivalente sémantiquement à une phrase de la même forme que "$\neg\exists x\neg(\ldots x \ldots)$", et le même raisonnement vaut pour les phrases de la même forme que "$\exists x(\ldots x \ldots)$" et de "$\neg\forall x\neg(\ldots x \ldots)$". Il n'était donc pas nécessaire d'introduire les deux quantificateurs dans le lenage : l'introduction d'un seul aurait déjà nous donnée les ressources pour définir l'autre.[8]

Cette "dualité" des quantificateurs s'explique par leurs relations à des conjonctions et disjonctions. L'affirmation universelle, de tous les pingouins, qu'ils sont heureux revient à dire que a (le plus petit pingouin) est heureux *et* que b est heureux, ...*et* que a_{100023} (le plus grand pingouin) est également heureux. De la même manière, une affirmation existentielle correspond à une disjonction : dire qu'il y ait un pingouin heureux revient à dire que soit le premier, soit le deuxième, soit le n-ième est heureux.[9]

La dualité des quantificateur peut donc être vu comme 'extension' de la dualité entre conjonction et disjonction, capturée par les lois de Morgan : comme nous pouvons 'faire entrer' une négation à une conjonction si nous nions les conjoints et en font la disjonction, nous pouvons 'faire entrer' une négation à une quantification universelle si nous nions la phrase quantifiée et la quantifions existentiellement : comme $\wedge$ correspond à $\neg \vee \neg$, $\forall$ correspond à $\neg\exists\neg$. Schématiquement, en utilisant $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ comme nom de n'importe quelle phrase qui contient une occurrence de la variable "x", nous obtenons

[8] Nous avons remarqué un phénomène similaire dans la logique propositionnelle dans le ch. 3.7.

[9] Cette "correspondance" est compliquée par deux facteurs : elle n'est valide que pour les domaines de quantification finis, premièrement, et présuppose une "condition de clôture" deuxièment. S'il y avait une infinité de pingouins, en effet, la "conjonction" ou "disjonction" devenait infinie, ce qui est exclut par notre définition de "formule bien formé" pour le langage de la logique des prédicats (cf. déf. 45 à la p. 179). La nécessité d'une condition de clotûre devient évidente quand on considère que les inférences

(9) $$\frac{Ga \wedge Gb \wedge \ldots \wedge Gz}{\forall x(Fx \rightarrow Gx)}$$

et

(10) $$\frac{\exists x(Fx \wedge Gx)}{Ga \vee Gb \vee \ldots \vee Gz}$$

ne sont pas valides, même si nous réuississons en effet d'enumérer tous les F par "a", "b", ..., "z". La raison pour ceci est simplement qu'il est toujours possible qu'il y ait plus de F que ceux qui existent en réalité, et que nous requérons pour la validité la transmission *nécessaire* de la vérité des prémisses à la conclusion. Nous sommes donc obligés de rajouter une prémisse supplémentaire aux deux inférences, stipulant que notre énumeration est en effet exhaustive :

(11) $$\frac{\begin{array}{c}Ga \wedge Gb \wedge \ldots \wedge Gz\\ \forall x(Fx \rightarrow (x = a \vee x = b \vee \ldots \vee x = z))\end{array}}{\forall x(Fx \rightarrow Gx)}$$

(12) $$\frac{\begin{array}{c}\exists x(Fx \wedge Gx)\\ \forall x(Fx \rightarrow (x = a \vee x = b \vee \ldots \vee x = z))\end{array}}{Ga \vee Gb \vee \ldots \vee Gz}$$

ceci :

$$\ulcorner \forall x\ (\phi(x)) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg \exists x\ \neg(\phi(x)) \urcorner$$
$$\ulcorner \exists x\ (\phi(x)) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg \forall x\ \neg(\phi(x)) \urcorner$$

En nous servant des négations dites "externes", qui portent sur des phrases complètes, nous pouvons donc formaliser les quatre phrases considérées à l'aide d'un seul quantificateur :

A9	$\forall x(\mathbf{Ph}(x) \to \mathbf{M}(x))$	**A10**	$\neg\exists x(\mathbf{Ph}(x) \wedge \neg\mathbf{M}(x))$
B9	$\forall x(\mathbf{noir}(x) \to \neg\mathbf{rouge}(x))$	**B10**	$\neg\exists x(\mathbf{noir}(x) \wedge \mathbf{rouge}(x))$
C9	$\neg\forall x(\mathbf{P}(x) \to \neg\mathbf{H}(x))$	**C10**	$\exists x(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{H}(x))$
D9	$\neg\forall x(\mathbf{A}(x) \to \mathbf{P}(x))$	**D10**	$\exists x(\mathbf{A}(x) \wedge \neg\mathbf{P}(x))$

L'équivalence sémantique entre "$\forall x(\ldots x \ldots)$" et "$\neg\exists x\neg(\ldots x \ldots)$" a une autre conséquence : elle implique que le quantificateur universel n'a pas d'"engagement existentiel' – que nous ne pouvons pas conclure du fait que tous les F sont G qu'il y a des F.[10] Cela s'explique par l'équivalence mentionnée : s'il n'y a pas de F, il n'y a pas de F qui sont G et il n'y a pas non plus de F qui sont $\neg G$. Par conséquent "$\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$" et "$\neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$" sont des phrases vraies. Ces phrases, cependant, sont équivalentes à "$\forall x(Fx \to \neg Gx)$" et à "$\forall x(Fx \to Gx)$" respectivement. Étant donné qu'il n'y a pas de licornes, "toutes les licornes sont bleues" et "toutes les licornes ne sont pas bleues" sont deux phrases également vraies.

Il est donc significatif que nous formalisions "tous les F sont G" par "$\forall x(Fx \to Gx)$", utilisant l'implication pour restreindre le choix des x en question. Il est également significatif que nous formalisons "il y a des F qui sont des G" ou "quelques F sont des G" par "$\exists x(Fx \wedge Gx)$", utilisant la conjonction plutôt que, par exemple, l'implication. Étant donné l'interdéfinissabilité des connecteurs, "$\exists x(Fx \to Gx)$" est équivalente à "$\exists x(\neg Fx \vee Gx)$", une phrase qui n'affirme pas qu'il y a des F.

9.4 Problèmes de formalisation

Vu le gain en expressivité, la formalisation en logique des prédicats est plus difficile que celle en logique propositionelle. Considérons par exemple le phénomène de généralité multiple (ch. 8.6). La formalisation des phrases du langage ordinaire exhibant une généralité multiple en termes d'une langue de la logique de prédicats est souvent compliquée par le fait que le langage ordinaire contient beaucoup d'occurrences d'une généralité implicite, comme dans l'exemple suivant :

(**i**) Toutes les filles bien-élevées aiment un prince.

Comparée à d'autres phrases comme "toutes les filles bien-élevées aiment leur père" vs. "toutes les filles bien-élevées aiment leurs pères", (**i**) n'est pas ambigüe entre "$\forall\exists$ et $\exists\forall$, mais plutôt entre les deux phrases suivantes :

($\mathbf{i}'$)	$\forall x((Fx \wedge Bx) \to \exists y(Py \wedge Axy))$	toutes les filles bien-élevées aiment quelque prince
($\mathbf{i}''$)	$\forall x((Fx \wedge Bx) \to \forall y(Py \to Axy))$	toutes les filles bien-élevées aiment n'importe quel prince

Pour illustrer d'autres difficultés, considérons les raisonnements fallacieux suivants :

F1 Bleu est la couleur du ciel. La couleur du ciel change. Donc bleu change.

[10] Nous avons vu à la p. 145 que ce charactéristique distingue la logique des prédicats de la syllogistique.

F2 Les apôtres sont douze. Jean est un apôtre. Donc Jean est douze.

F3 Les hommes sont disséminés un peu partout sur la Terre. Jacques est un homme. Donc Jacques est disséminé un peu partout sur la Terre.

A propos de la première inférence (**F1**), il faut faire la distinction entre descriptions définis et noms propres, puisque c'étaient précisément des exemples comme celui-ci qui avaient motivés Bertrand Russell (1905) pour sa théorie des descriptions définis (traduction française : Russell (1989a)).

L'inférence (**F1**) est valide dans la logique des prédicats standard si nous la formalisons comme suit :[11]

$$(13) \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{bleu} = \text{la couleur de ciel}\\ \text{change(la couleur du ciel)}\end{array}}{\text{change(bleu)}}$$

(13) est valide parce qu'une et la même chose ne peut pas satisfaire et en même temps ne pas satisfaire la même phrase ouverte "... change". La théorie des descriptions définis de Russell nous conseille, cependant, de ne pas formaliser la première prémisse comme l'affirmation d'une identité, "bleu = la couleur de ciel", mais comme une prédication "la couleur de ciel(bleu)" – disant de la couleur bleu (une propriété), qu'elle satisfait la phrase ouverte "... est la couleur de ciel". Plus généralement, Russell nous conseille de formaliser une description définie comme "le roi de la France" comme suit

"Le roi de la France est chauve." $\rightsquigarrow$ $\exists! x(x$ est roi de la France $\wedge$ x est chauve$)$[12]

Cette formalisation a l'avantage considérable de nous permettre une distinction entre deux interprétations de "Le roi de la France n'est pas chauve", une qui implique qu'il est poilu (et donc existe), une autre qui dit seulement que la phrase "le roi de la France est chauve" est fausse :

"Le roi de la France, il n'est pas chauve." $\rightsquigarrow$ $\exists! x(x$ est roi de la France $\wedge \neg(x$ est chauve$))$

"Il n'est pas le cas que : le rdF est chauve." $\rightsquigarrow$ $\neg\exists! x(x$ est roi de la France $\wedge$ x est chauve$)$

Un terme singulier est une expression qui désigne exactement un objet ; selon la classification traditionnelle d'Aristote, c'est ce dont quelque chose (un prédicat) est prédiqué ou dit et ce qui ne peut pas être dit d'autre chose (de la manière d'un prédicat). Le propre d'un terme singulier est sa relation de désignation ou de référence à un et un seul objet précis. Parmi les termes singuliers, la philosophie du langage distingue au moins trois sous-espèces d'expressions : un nom propre, comme "Sam" ou "Paris", est une expression qui se réfère "directement" à un objet ;[13] une expression indexicale, comme "ceci", "je" ou "maintenant", désigne son référent par l'intermédiaire d'un contexte d'énonciation ;[14] et une description définie comme "le roi actuel de France" et "l'homme dans le coin" désigne au moyen de son contenu 'descriptif' (le prédicat à l'aide duquel il est formé, "... est le roi actuel de France", "... est

[11] Il faut remarquer, cependant, que la logique des prédicats standard ne considère que des prédicats de premier ordre. La formalisation donnée est donc incorrecte pour plus d'une raison.

[12] Nous utilisons ici "$\exists! x(\phi(x))$" pour dire qu'il existe *exactement* une chose qui ϕ. Dans le langage naturel, "il y a un qui ...x..." est souvent ambigüe entre "$\exists x(\phi(x))$" et "$\exists! x(\phi(x))$". Dans le cas de "il y a un philosophe irlandais", la bonne formulation utilise "$\exists$", dans "il a un enfant" elle utilise "$\exists!$", mais "il a fait une faute" (sans intonation particulière) peut être ambigüe entre les deux.

[13] Ceci a été contestée par beaucoup de philosophes de langage, en particulier par Frege (1892b) (traduction française : Frege (1971)). Je suis ici la thèse célèbre de Saul Kripke (1972) que les noms sont des "désignateurs rigides" (traduction française : Kripke (1982)).

[14] Ceci, au moins, d'après l'analyse classique et communément accepté qu'en a donné David Kaplan (1989).

l'homme dans le coin"). En logique des prédicats, nous ne formalisons par des constantes individuelles que des noms propres.

Dans la deuxième inférence (**F2**), nous avons affaire à un prédicat numérique "... sont douze", qui pose les mêmes problèmes que le prédicat "... existe" (cf. le ch. 8.5). Nous ne pouvons donc pas les formaliser comme prédicats ordinaires, puisque autrement l'inférence suivante serait valide :

$$(14)\qquad \begin{array}{c} \forall x(x \text{ est un apôtre} \rightarrow x \text{ est douze.} \\ \underline{(\text{...est un apôtre})\ \text{Jean}} \\ (\text{...est douze})\ \text{Jean} \end{array}$$

Comme "...existe", les prédicats numériques doivent être formalisés à l'aide du quantificateur existentiel :

il y a au moins un F	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Fx)$
il y a au maximum un F	$\rightsquigarrow$	$\forall x \forall y\ ((Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y)$
il y a exactement un F	$\rightsquigarrow$	$\exists x\ (Fx\ \wedge \forall y\ (Fy \rightarrow y = x))$[15]
il y a au moins deux F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y\ (Fx \wedge Fy\ \wedge\ x \neq y)$
il y a au maximum deux F	$\rightsquigarrow$	$\forall x \forall y \forall z((Fx \wedge Fy \wedge Fz) \rightarrow (x = y \vee y = z \vee x = z))$
il y a exactement deux F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y\ (Fx \wedge Fy\ \wedge\ x \neq y\ \wedge\ \forall z\ (Fz \rightarrow (x = z \vee y = z)))$
il y a au moins trois F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y \exists z\ (Fx \wedge Fy \wedge Fz\ \wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$
il y a exactement trois F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y \exists z\ (Fx \wedge Fy \wedge Fz\ \wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge$ $\forall w(Fw \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)))$

La troisième inférence (**F3**), finalement, est la plus difficile à exclure : le diagnostic est que"... être disséminé" est un prédicat 'collectif' qui s'applique à une pluralité et ne peut pas être défini en termes de prédicats qui s'appliquent aux membres de cette pluralité.[16] Considérons les exemples suivants :

Russell et Whitehead sont des hommes.	$\Leftrightarrow$	Russell est un homme $\wedge$ Whitehead est un homme
Russell et Whitehead ont écrit les *Principia*.	$\not\Leftrightarrow$	Russell a écrit les *Principia* $\wedge$ Whitehead a écrit les *Principia*

Le fait que la deuxième équivalence ne fonctionne pas montre que "... a écrit les *Principia*", contrairement a "... est un homme", est un prédicat collectif : être co-auteur ne veut pas dire être auteur, mais être membre d'un collectif d'hommes veut dire être un homme. C'est parce qu'il s'agit d'un prédicat collectif que nous ne pouvons pas formaliser la première prémisse de (**F3**) comme :

$$\forall x\ (x \text{ est un homme } \rightarrow\ x \text{ est disséminé un peu partout sur la Terre})$$

9.5 Une classification des expressions

La logique propositionnelle, nous l'avons dit, traite des phrases et des connecteurs, la logique des prédicats traite des prédicats, des quantificateurs et des constantes individuelles. Nous avons également dit qu'une phrase est ce qui est exprimé par une phrase complète qui peut être vraie ou fausse et qu'un prédicat est tiré d'une phrase après l'effacement d'un ou de plusieurs noms. Nous devons maintenant être un peu plus précis.

[16] A la suite de Boolos (1984), différents auteurs ont développé une "logique plurielle", qui introduit des constantes individuelles pour des pluralités (cf. par. ex. McKay 2006). Nous reviendrons sur cette "quantification plurielle" au ch. 12.7.

La notion de proposition, qui est une notion philosophique, ne coïncide pas avec la notion de phrase, qui est une notion grammaticale. Une phrase peut être complète du point de vue grammatical sans pour autant exprimer une proposition : "J'ai faim", pour être vraie ou fausse, a besoin d'être complétée par le contexte de l'énonciation pour attribuer une référence indexicale à "je"; dans certains contextes, cette phrase exprime la phrase qu'un certain individu, a, a faim, dans d'autres qu'un autre individu, b, a faim. Une phrase peut aussi être complexe et ainsi exprimer une phrase complexe qui contient plusieurs phrases simples. Le critère d'identification des phrases est leur capacité à être vraies ou fausses. Parallèlement à ce critère sémantique, il existe un critère purement syntaxique : une phrase (au sens logique) est une entité linguistique qui peut être combinée avec une négation externe ("il n'est pas le cas que ...").

Les différences entre les points de vue grammatical et logique se multiplient quand on prend en compte la structure interne des phrases, comme nous le faisons dans la logique des prédicats. La grammaire classique distingue des noms propres, des noms communs, des verbes, des particules, des prépositions, des adverbes et des adjectifs. La logique des prédicats ne reconnaît, cependant, que des connecteurs propositionnels, des quantificateurs, des prédicats et des termes singuliers. Les connecteurs sont les concepts formels qui nous servent à former des phrases complexes à partir de phrases simples. Un prédicat est une expression qui nous sert à attribuer une propriété. Cette propriété peut être une propriété d'une ou de plusieurs choses ; un prédicat unaire (qui résulte d'une phrase en effaçant (plusieurs occurrences d') un seul nom) attribue une propriété monadique, un prédicat binaire (tertiaire, ...) une propriété relationnelle. Syntaxiquement, un prédicat est une expression qui peut être combinée avec une négation 'interne', "... n'est pas tel que ...", qui prend un prédicat (dans sa deuxième position) et en fait un autre.

Une représentation claire et exhaustive de représenter ces différences grammaticales nous est fournie par la grammaire dite "catégorielle" (cf. Gardies 1975) qui représente les phrases par "S" et les termes singuliers par "N". Nous pouvons dire qu'un connecteur propositionnel binaire est une expression de la catégorie **S/SS**, parce qu'il prend deux phrases pour en faire une, plus complexe :[17]

Il pleut	et	Je suis triste
S	**S/SS**	**S**
	Il pleut et je suis triste	
	S	

Les autres connecteurs propositionnels binaires, "ou", "si-alors", "si et seulement si", s'appliquent également à deux phrases et en forment une phrase complexe. La négation externe s'applique cependant qu'à une seule phrase et est donc du type **S/S**.

Un prédicat unaire, d'après notre définition, est une expression qui forme, avec un terme singulier, une phrase complète, ce qui correspond au type **S/N** :

Sam	... est triste
N	**S/N**
Sam est triste.	
S	

Les prédicats binaires seront du type **S/NN**, les prédicats ternaires du type **S/NNN** et ainsi de suite. Cette notation nous montre comment un prédicat binaire, combiné avec un seul terme singulier, devient un prédicat unaire (dit "relationnel", parce qu'il est obtenu d'une relation) :

[17] Un avantage de la notation de la grammaire catégorielle est qu'elle nous permet de calculer le type syntaxique de la juxtaposition de deux expressions arbitraires : la combinaison d'une expression du type **S/SS** avec deux expressions du type **S** serait du type **S**. La combinaison d'une telle expression avec une expression du type **N** sera mal-formée.

Sam ... aime $\cdots$ Maria

S/NN **N**

... aime Maria

N **S/N**

Sam aime Maria

S

L'expression " ... aime $\cdots$" du type **S/NN** a été partiellement complétée par le nom "Maria" (du type **N**), ce qui produit une expression du type **S/N**. La relation exprimée par "... aime $\cdots$" est une propriété de la paire $\langle$ Sam, Maria $\rangle$, mais la propriété monadique exprimée par "... aime Maria" est une propriété de Sam.

La grammaire catégorielle nous permet aussi de symboliser l'autre usage que nous avons fait des connecteurs qui était de relier non pas des phrases ou phrases complètes, mais des phrases ouvertes :

Sam ... est triste et ... marié

S/N (**S/N**)/(**S/N**)(**S/N**) **S/N**

... est triste et marié

N **S/N**

Sam est triste et marié

S

Le connecteur "$\wedge$" dans cette phrase est du type (**S/N**)/(**S/N**)(**S/N**) – il prend deux phrases ouvertes et en forme une phrase ouverte.

La grammaire catégorielle nous permet de représenter facilement des prédicats de deuxième et troisième ordre. Un prédicat est dit "de premier ordre" s'il s'applique à des noms d'objets, c'est-à-dire à des expressions qui représentent des choses qui ne sont ni des propriétés ni des relations, mais des individus. C'est de ces prédicats que l'on a parlé jusqu'à maintenant. Un prédicat de deuxième ordre est un prédicat qui s'applique à des propriétés et à des relations et qui se combine avec des prédicats – les expressions, par exemple, "... est un prédicat" et "... s'applique à un nom d'un objet pour former une phrase" sont des prédicats de deuxième ordre. Comme un prédicat (unaire) de premier ordre est du type **S/N**, un prédicat de deuxième ordre sera du type **S**/(**S/N**). Il y a également des prédicats de troisième ordre (**S**/(**S**/(**S/N**))), de quatrième ordre, etc.

L'interprétation sémantique des prédicats de deuxième et de troisième ordre se fait plus intuitivement en termes d'ensembles. Supposons que la totalité des choses pour lesquelles nous disposons de noms ou dont nous voulons parler forme un ensemble D, notre ***univers de discours*** et notre ***domaine de quantification***. Un prédicat, nous l'avons vu, est vrai de certaines de ces choses – son extension sera alors un sous-ensemble de D. Si nous identifions des prédicats ayant la même extension, nous pouvons dire que n'importe quel sous-ensemble de D (n'importe quel membre de $\mathcal{P}(D)$, c'est-à-dire de l'ensemble de tous les sous-ensembles de D) définit (ou correspond à) un prédicat – le prédicat qui est vrai de tous les objets et seulement des objets qui se trouvent dans le sous-ensemble de D en question.[18]

Si les prédicats de premier ordre sont des membres de $\mathcal{P}(D)$ (les sous-ensembles de D), les prédicats de deuxième ordre sont des membres de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ – ils sont vrais de certains prédicats (de certains sous-ensembles de D) et faux d'autres ; ils ont donc comme extensions des ensembles de sous-ensembles. Nous voyons par cette analogie que la similarité entre les différents ordres de prédicats et les différents

[18]Dans le cas où ce sous-ensemble est fini, nous pouvons facilement formuler un tel prédicat comme une disjonction d'identités : au sous-ensemble $\{a, b, c\}$, par exemple, correspondra le prédicat "$(x = a \vee x = b \vee = c) \wedge \forall y((y \neq a \wedge y \neq b \wedge y \neq c) \rightarrow y \neq x)$".

types dans la théorie des ensembles n'est pas que superficielle, mais qu'elle est basés sur une vraie correspondence dans la grammaire catégorielle.

Cependant, les prédicats 'ordinaires' de deuxième ordre ne sont pas les seuls à tomber sous la catégorie $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$: les autres expressions qui tombent sous ce type sont les quantificateurs de premier ordre. Les quantificateurs prennent des phrases ouvertes pour en faire des phrases complètes. Les phrases ouvertes peuvent être de différents ordres, selon qu'elles sont vraies (ou fausses) d'objets ou vraies (ou fausses) de prédicats ou vraies (ou fausses) de prédicats de prédicats etc. Les deux quantificateurs de la logique des prédicats, le quantificateur universel "$\forall x(\ldots x \ldots)$" et le quantificateur existentiel "$\exists x(\ldots x \ldots)$", ne prennent que des prédicats ou phrases ouvertes de premier ordre – ils quantifient sur des objets et sont, pour cette raison, appelés "objectuels" :

Il y a quelqu'un		... est triste
$\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$		$\mathbf{S}/\mathbf{N}$
	Il y a quelqu'un qui est triste.	
	$\mathbf{S}$	

Les quantificateurs de premier ordre sont de la même catégorie que les prédicats de deuxième ordre. Une logique ne contenant dans son langage que des quantificateurs qui s'appliquent à des phrases ouvertes de premier ordre (et qui sont, en conséquence, eux-mêmes de deuxième ordre) est appelée elle-même "de premier ordre". La logique classique des prédicats est la logique des prédicats de premier ordre et c'est elle que nous allons étudier.

9.6 Les quantificateurs

Nous avons vu comment nous pouvons nous servir du mécanisme de la quantification pour exprimer des phrases générales. Cette introduction de quantificateurs rend notre langage plus expressif. Supposons que nous voulons dire que tous les hommes sont mortels et l'exprimer dans notre langage. Vu qu'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes (présents ou passés, au moins), nous pourrions énoncer la longue conjonction suivante :

Sylvie est mortelle $\wedge$ Sam est mortel $\wedge$ Marie est mortelle $\wedge$ Rosemarie est
mortelle $\wedge$ Jean-Claude est mortel $\wedge$ Kevin est mortel $\wedge$ Roberta est mortelle $\wedge$
John est mortel $\wedge$ Claudia est mortelle $\wedge$ Robert est mortel $\wedge$ Philipp est mortel $\wedge\ \ldots$

– une phrase certainement très longue, mais finie et bien-formée selon la logique propositionnelle. Si nous arrivons à énumérer tous les hommes, nous obtenons une phrase qui est vraie si et seulement si tous les hommes sont mortels. Néanmoins, une telle procédure, en plus de son caractère rébarbatif, aurait au moins trois autres désavantages majeurs :

1. La longue conjonction est équivalente sémantiquement à "tous les hommes sont mortels" seulement s'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes.
2. La longue conjonction est équivalente sémantiquement à "tous les hommes sont mortels" seulement si tous les hommes ont des noms.
3. Lorsque nous parlons de tous les hommes, notre énonciation a un aspect général : nous ne voulons pas dire qu'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes ou que nous connaissons un nom pour chaque homme qui existe ou existait, mais nous voulons parler de la totalité des hommes, indépendamment des membres particuliers qu'elle contient.

L'usage du quantificateur universel "$\forall$" ne tombe sous aucune de ces restrictions. Pour dire que tous les hommes sont mortels, nous disons simplement :[19]

(15) $\forall x$ (x est un homme $\rightarrow$ x est mortel)

Dans la phrase (15), nous ne parlons d'aucun homme en particulier : le quantificateur universel prend ses valeurs dans tout l'univers du discours. Nous notons deux conséquences de cette généralité : premièrement, (15) est 'confirmée' par tous les pingouins – parce que tout pingouin satisfait la phrase ouverte "$\neg$ (x est un homme) $\vee$ (x est mortel)". Deuxièmement, (15) est vraie s'il n'y a pas d'hommes ; dû à la signification de "$\rightarrow$", la phrase ouverte complexe est vraie de tout objet dont l'antécédent est faux.

Même si notre langage est devenu plus expressif en incluant des variables et des quantificateurs, qu'est-ce qui s'ensuit sur la logique ? Est-ce que nous serons toujours capable de formaliser comme valides les inférences syllogistiques ? Revenons donc sur les inférences (1), (2) et (3). En formalisant les prémisses et les conclusions dans la logique des prédicats, nous obtenons les inférences :

$$\frac{\text{Tous les hommes sont mortels.} \quad \text{Tous les philosophes sont des hommes.}}{\text{Tous les philosophes sont mortels.}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\forall x\ (x \text{ est un homme} \rightarrow x \text{ est mortel}) \quad \forall x\ (x \text{ est un philosophe} \rightarrow x \text{ est un homme})}{\forall x\ (x \text{ est un philosophe} \rightarrow x \text{ est mortel})}$$

$$\frac{\text{Aucun philosophe n'est méchant.} \quad \text{Quelques logiciens sont des philosophes.}}{\text{Quelques logiciens ne sont pas méchants.}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\neg\exists x\ (x \text{ est un philosophe} \wedge x \text{ est méchant}) \quad \exists x\ (x \text{ est un logicien} \wedge x \text{ est un philosophe})}{\exists x\ (x \text{ est un logicien} \wedge \neg(x \text{ est méchant}))}$$

$$\frac{\text{Aucun philosophe n'est parfait.} \quad \text{Tous les philosophes sont des hommes.}}{\text{Aucun homme est parfait.}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\neg\exists x\ (x \text{ est un philosophe} \wedge x \text{ est parfait}) \quad \forall x\ (x \text{ est un philosophe} \rightarrow x \text{ est un homme})}{\neg\exists x\ (x \text{ est un homme} \wedge x \text{ est parfait})}$$

Nous pouvons facilement justifier la validité de ces trois inférences :

(1) : si nous choisissons, pour vérifier la conclusion, n'importe quel individu a qui est un philosophe, la deuxième prémisse nous dit que cet individu est un homme et la première prémisse nous dit qu'en conséquence il est mortel ;

(2) : la deuxième prémisse nous dit qu'il y a un objet, appelons-le "a", qui est logicien et philosophe. Si, contrairement à ce que dit la conclusion, ce a n'était pas seulement un logicien, mais aussi méchant, alors il y aurait, contrairement à ce que dit la première prémisse, un philosophe méchant.

(3) : S'il y avait un philosophe parfait, alors ce philosophe, par la deuxième prémisse, serait un homme et alors, par la première prémisse, il ne serait pas parfait. Donc il n'y a pas de philosophe parfait.

Le but de la prochaine leçon (10) est de formuler une sémantique qui justifie la validité de ces schémas d'inférences.

[19] Il y a plusieurs façons de lire la phrase (15) :
1. Les hommes sont mortels.
2. Un humain est mortel.
3. Chaque homme est mortel.
4. Quiconque est un homme est mortel.

Nous utiliserons parfois la locution "tous les x sont tels que, si x est un homme, alors x est mortel" qui rend plus visible la forme logique.

9.7 Le domaine de quantification

La quantification est intimément liée au concept de “univers de discours” ou “domaine de quantification”.“$\forall x(Fx)$” signifie que tous les éléments du domaine de quantification ont la propriété exprimée par le prédicat “Fx” ; “$\exists x(Fx)$” signifie qu'il existe au moins un élément du domaine de quantification qui a la propriété exprimée par le prédicat “Fx”. Le domaine de quantification est l'ensemble des choses dont nous parlons[20] – les choses qui peuvent fournir des contre-exemples à nos assertions.

Le domaine de quantification nous fournit une interprétation d'une variable sous une assignation. Assigner une valeur à une variable revient à choisir un élément du domaine de quantification comme valeur pour la variable.

Comme nous avons vu à la p. 152, la quantification dans les langues naturelles est souvent restreinte : quand je dis, par exemple, qu'il ne reste plus de bière, je ne parle pas de toutes les bières dans l'univers, mais je dis plutôt qu'il n'y a plus de bières *dans mon appartement* : je dis de toutes les choses dans mon appartement qu'elles ne sont pas de bières. Dans la logique de prédicats, ceci correspond à une conditionalisation de mon assertion : “$\forall x(x$ est dans mon appartement $\rightarrow \neg(x$ est une bière$)x)$”. Il est à remarquer que la quantification dans cette assertion *n'est pas* restreinte : l'affirmation ne parle pas seulement des choses dans mon appartement, mais de toutes les choses (et elle est, en plus, vraie de toutes les choses qui ne sont pas dans mon appartement, même des bières qui se trouvent ailleurs). De manière analogue, la restriction de la quantification existentielle se fait par une conjonction : la formalisation de “

Pour éviter cette conséquence, nous pouvons explicitement restreindre la quantification, comme nous faisons souvent en mathématique : quand je dis qu'il y ait un nombre entre 4 et 6, j'écrirait “$\exists x \in \mathcal{N}(4 < x < 6)$”, où le prédicat “$x \in N$” n'est vraie que des nombres naturels.[21]

Points à retenir

1. La logique des prédicats formalise des inférences qui charactérisent la logique des quantificateurs.
2. Une inférence de la logique de prédicats nous apprend qu'un prédicat est *vrai d'* une ou plusieurs choses s'il est vrai de certaines choses.
3. La forme générale d'une phrase simple dans la logique de prédicats est “Fa” – F est considéré comme une fonction qui prend une chose et donne une valeur de vérité.
4. Les prédicats dans la logique des prédicats sont unaires, binaires ou plus généralement n-adiques.
5. Un terme singulier est soit un nom, un indexical, un démonstratif ou une description définie.
6. Les variables ...
7. La grammaire catégorielle charactérise un prédicat par le type $\mathbf{S}/\mathbf{N}$, les connecteurs de phrases par le type $\mathbf{S}/\mathbf{S}$, les connecteurs qui forment des prédicats complexes par le type $(\mathbf{S}/\mathbf{N})/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$ et les quantificateurs de premier ordre par le type $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$.
8. Les quantificateurs sont alors des prédicats de deuxième ordre : ils s'appliquent à des prédicats pour en faire des phrases.
9. Le quantificateur universel ‘abrège’ des conjonctions infinies ; le quantificateur existentiel ‘abrège’

[20] Je dis “ensemble” même si cette notion relève des problématiques. Comme nous prouverons à la p. 229, il ne peut pas y avoir un ensemble universel – un ensemble qui contient tout ce qu'il y a (donc également soi-même). D'après beaucoup (cf. par ex. Williamson 2003), il est cependant parfaitement cohérent de quantifier sur tout ce qu'il y a. Dans une telle théorie, en conséquence, le domaine de quantification ne peut pas être un ensemble.

[21] Même dans ce cas, cependant, la différence entre “$\exists x \in \mathcal{N}(4 < x < 6)$” et “$\exists x(x \in \mathcal{N} \wedge 4 < x < 6)$” reste notationnelle.

des disjonctions infinies ; ils sont 'duales' de la même manière que le sont la conjonction et la disjonction.

10. Un quantificateur a un domaine de quantification associé qui limite le choix d'objet pour l'interprétation de la variable qu'il quantifie.