Exercices 10 : Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

cours d'introduction à la logique, UniL, Philipp Blum

à rendre le mercredi 8 mai 2019, avant 8h30

Nom(s) : _____

Points obtenus (dans 6 questions avec un total de 20 points) : _____

1. (3 points) Expliquez
   (a) ce qu'est un terme singulier ;
   (b) ce qu'est une phrase ouverte ;
   (c) quelle est la distinction entre usage et mention ;
   (d) ce qu'est un système formel axiomatique ;
   (e) quelle est l'analyse Russellienne d'une description définie ;
   (f) quelle est l'analyse Fregéenne des énoncés d'identité.

2. (2 points) Formalisez les phrases suivantes dans le langage de la logique des prédicats :
   (a) « Il n'y a que trois manières de cuisiner des pâtes. »
   (b) « Le Père Noël n'existe pas. »
   (c) « Sam est le singe le plus intelligent du zoo. »
   (d) « À part moi, il n'y avait que Sam qui était là. »

3. (3 points) À l'aide de la définition de validité, justifiez la vérité des propositions suivantes :
   (a) « $\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Gx \to \neg Hx) \models \forall x(Fx \to \neg Hx)$ »
   (b) « $\forall x(Fx \to Gx) \models \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ »
   (c) « $\forall x(Fx \to Gx), \exists x(\neg Gx) \models \exists x(\neg Fx)$ »

4. (1 point) Formalisez dans le langage de la logique des prédicats :
   (a) "Tous les Suisses peuvent entrer."
   (b) "Que des Suisses peuvent entrer."

5. (7 points) Formalisez (supposez que le domaine de quantification est la totalité des êtres humains) :
   (a) Suzie est F.
   (b) Sam est F.
   (c) Quelques D sont F.
   (d) Tout D est F.
   (e) Seuls les D sont F.
   (f) Les D ne sont pas les seuls à être F.
   (g) Aucun H n'est F.
   (h) Tous les F sont G sauf ceux qui sont H.
   (i) Quelques H ne sont pas F.
   (j) Sam n'est pas F.
   (k) Suzie a tué Sam.
   (l) Quelqu'un a tué Sam.
   (m) Sam a tué quelqu'un.
   (n) Quelqu'un a tué quelqu'un.
   (o) Quelqu'un s'est tué.
   (p) Personne ne s'est tué.
   (q) Quelqu'un a tué tout le monde.
   (r) Quelqu'un a été tué par tout le monde.
   (s) Il y a un S entre Sam et Suzie.
   (t) Chaque douanier hait un coureur. [n'importe lequel]
   (u) Quelques coureurs aiment chaque douanier.
   (v) Il y a un coureur haï par tous les douaniers fous.
   (w) Quelques C n'ont la relation P avec aucun FD.
   (x) Quelques C ont la relation P seulement avec des D qui ne sont pas F.

6. (4 points) Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats avec $\mathbf{I} = \{0\}$, $\mathbf{J} = \{0, 1, 2\}$, $\mathbf{K} = \{0, 1\}$, $\lambda(0) = 2$, $\mu(0) = 1$, $\mu(1) = \mu(2) = 2$. Nous remplaçons les signes non-logiques par les suivants :

$$\begin{aligned}
\dots R_0 \cdots &\rightsquigarrow \dots \leq \cdots \\
f_0(\dots) &\rightsquigarrow -\dots \\
f_1(\dots, \cdots) &\rightsquigarrow \dots + \cdots \\
f_2(\dots, \cdots) &\rightsquigarrow \dots \times \cdots \\
c_0 &\rightsquigarrow 0 \\
c_1 &\rightsquigarrow 1
\end{aligned}$$

(a) Les expressions suivantes sont-elles des termes de $\mathcal{L}^+$?

(i) « 0 »
(ii) « $x_1 + 1$ »
(iii) « $+x_1$ »
(iv) « $x_1\times$ »
(v) « $x_1 \times (0 + 1)$ »
(vi) « 2 »

(b) Les expressions suivantes sont-elles des formules atomiques de $\mathcal{L}^+$?

(i′) « $x_1 + 1$ »
(ii′) « $0 + 0 = 1$ »
(iii′) « $(x_1 \leq 1) \neq 1$ »
(iv′) « $\forall x_1(x_1 \leq (0 + 1))$ »
(v′) « $0 + 1 \neq 0 \times 1$ »
(vi′) « $x_1 \leq 1$ »

(c) Les expressions suivantes sont-elles des formules de $\mathcal{L}^+$?

(i″) « 0 »
(ii″) « $x_1 + 1 \leq x_1$ »
(iii″) « $\forall x_1(x_1 \times (0 + 1))$ »
(iv″) « $1 + (x_1 \times (0 + 1))$ »
(v″) « $(1 + 1) \wedge (0 \leq 1)$ »
(vi″) « $\forall x_1(x_1 \leq (0 + 1))$ »

(d) Dans lesquelles des formules suivantes $\mathcal{L}^+$ la variable « x_1 » a-t-elle une occurrence libre ?

(i‴) « $x_1 + 1 \leq 1$ »
(ii‴) « $\forall x_1 \neg(x_1 \neq (0 + 1))$ »
(iii‴) « $\exists x_2(1 + (x_2 \times (0 + 1) \leq x_1))$ »
(iv‴) « $\forall x_1(0 \leq x_1) \wedge ((0 \leq 1) \vee 1 \neq x_1)$ »
(v‴) « $\forall x_1((0 \leq x_1) \rightarrow (1 \neq x_1))$ »
(vi‴) « $\forall x_2 \exists x_1 \neg(x_2 \leq x_1)$ »