Solutions aux exercices 4

cours d'introduction à la logique, printemps 2019, UniL, Philipp Blum

1. (2 points) Insérez les concepts mentionnés dans une colonne du tableau.

   Solution :

syntaxe	sémantique	pragmatique
« formule bien formée »	« tautologie »	« actes de parole »
« règle d'inférence »	« validité »	«« et » /« mais »»
« axiome »	« vérité »	« vouloir dire »
« preuve »	« conséquence (sémantique)»	« contexte »

   Bien que la validité (valide/invalide – métalangage) ne soit pas à confondre avec la vérité (vrai/faux – langage objet), cette première dépend de la seconde (cf.la définition de la validité). C'est pour cela que nous la rangeons dans la colonne « sémantique ».

   « Vouloir dire » est un cas limite, puisqu'on peut l'utiliser aussi pour dire « signifier » – ce qui en ferait une notion sémantique. Néanmoins, nous avons vu que la sémantique en logique ne s'occupe de rien d'autre que des valeurs de vérités des phrases, et que l'idée de « signification » telle que représentée dans un dictionnaire est donc à oublier ici.

   Le même problème se pose pour la différence entre « et » et « mais » (cf. la septième question de la première série). À part des différences pragmatiques, il y a aussi des différences syntaxiques : le premier mot contient deux lettres, le deuxième quatre.

2. (2 points) Aristote, dans la *Métaphysique* Λ 9 dit :

   > Soit l'intelligence divine pense, soit elle ne pense rien. Or si elle ne pense rien, elle est dans un état semblable au sommeil, mais c'est là chose contraire à sa dignité. Par ailleurs, si elle pense, alors soit elle se pense elle-même, soit elle pense quelque autre chose. Mais il est absurde qu'autre chose soit objet de sa pensée. Donc elle pense, et elle se pense elle-même.

   Formalisez les quatre premières phrases à l'aide de quatre propositions simples, de manière à ce que la dernière phrase s'ensuive des quatre prémisses.

Solution :

1. Formalisons l'argument ainsi :

Soit l'intelligence divine pense, soit elle ne pense rien.	$p \vee \neg p$
Or si elle ne pense rien, elle est dans un état semblable au sommeil,	$\neg p \to q$
mais c'est là chose contraire à sa dignité.	$\neg q$
Par ailleurs, si elle pense, alors ou elle se pense elle-même, ou elle pense quelque autre chose.	$p \to (r \vee s)$
Mais il est absurde qu'autre chose soit objet de sa pensée.	$\neg s$
Donc elle pense, et elle se pense elle-même.	$p \wedge r$

2. On a donc l'argument suivant :

(A1)	$p \vee \neg p$
(A2)	$\neg p \to q$
(A3)	$\neg q$
(A4)	$p \to (r \vee s)$
(A5)	$\neg s$
(A6)	$p \wedge r$

3. Nous pouvons démontrer la validité de cet inférence de manières différentes :

   (a) Par des règles d'inférence (de la déduction naturelle, cf. le chapitre correspondant) :

1	$\vdash p \vee \neg p$	tautologie
2	$\vdash \neg p \to q$	prémisse
3	$\vdash \neg q$	prémisse
4	$\vdash \neg\neg p$	MT (modus tollens) de (2) et (3)
5	$\vdash p$	DN (élimination de la double négation) de (4)
6	$\vdash p \to (r \vee s)$	prémisse
7	$\vdash \neg s$	prémisse
8	$\vdash r \vee s$	MP (modus ponens) de (6) et (5)
9	$\vdash r$	SD (syllogisme disjonctif) de (7) et (8)
10	$\vdash p \wedge r$	$\wedge$**I** (introduction de la conjonction) de (5) et (9)

   (b) À l'aide d'une table de vérité :

p	q	r	s	$r \vee s$	$\neg p$	$\neg p \to q$	$p \to (r \vee s)$	$\neg q$	$\neg s$	$\mathbf{A} := (\neg p \to q) \wedge \neg q \wedge (p \to (r \vee s)) \wedge \neg s$	$p \wedge r$	$\mathbf{A} \to (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V	V
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	F	F	V

(c) Par un simple raisonnement : Si, dans la ligne (A1), « $\neg p$ » était vrai, alors « q » serait vrai aussi (A2). Mais on sait que « q » n'est pas vrai (A3). Alors « $\neg p$ » n'est pas vrai, alors « p » est vrai (A1). Donc « $r \vee s$ » est vrai (A4), c'est-à-dire au moins une des phrases « r » et « s » est vraie. Mais « s » n'est pas vrai (A5). Donc « r » doit être vrai. Donc, en somme, « p » et « r » doivent être vrais (A6).

3. (1 point) (d'après Raymond Smullyan, *The Riddle of Scheherazade*) Ou comment la logique aide à draguer. **Solution** : Une phrase qui fera l'affaire est :

   (D) Vous n'allez pas me donner soit votre numéro de téléphone soit un bisou.

   Si (**D**) est vrai, alors la personne d'intérêt devra, pour tenir sa parole, vous donner son numéro de téléphone. Mais alors (**D**) serait faux. Alors (**D**) doit être faux. Mais si (**D**) est faux, alors soit vous recevez son numéro de téléphone soit un bisous. Mais la personne d'intérêt ne peut pas vous donner son numéro de téléphone, puisqu'elle a promis de ne pas le donner si (**D**) est faux. Alors elle doit vous donner un bisou pour tenir sa parole.

4. (1 point) Si « ϕ » est un nom pour la proposition « Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage » et si ψ est la proposition « J'étudie la logique », quelle est la proposition désignée par $\ulcorner \phi \vee \neg\psi \urcorner$? Quelle est la proposition désignée par ««« Je serai heureux et sage » est une conséquence logique de ϕ et de ψ » ?

   Solution :

   $\ulcorner \phi \vee \neg\psi \urcorner$ désigne la proposition « Soit si j'étudie la logique, je serai heureux et sage, soit je n'étudie pas la logique ».

   ««« Je serais heureux et sage » est une conséquence logique de ϕ et de ψ » désigne la proposition ««« Je serais heureux et sage » est une conséquence logique de « Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage » et de « J'étudie la logique »».

5. (2 points) Lesquelles des six assertions sont vraies ?

   Solution :

   (a) Il n'est **pas vrai** qu'aucune inférence valide n'a une conclusion fausse. Une inférence qui contient une prémisse fausse peut avoir une conclusion fausse et quand même être valide.
   (b) Il n'est **pas vrai** que toute inférence avec une conclusion vraie est valide. Pour que la inférence soit valide, il faut que la vérité des prémisses garantisse la vérité de la conclusion.
   (c) Il n'est **pas vrai** que toute inférence valide contient au moins une prémisse. Les vérités logiques (les tautologies) sont les conclusions des inférences sans prémisses.
   (d) Il est **vrai** qu'aucune inférence valide n'a toutes ses prémisses vraies et une conclusion fausse. Ceci est le cas exclu par la définition de la validité.
   (e) Il n'est **pas vrai** qu'il y a des inférences valides qui n'ont que des prémisses vraies et une conclusion fausse. Ceci est exclu par la vérité de (d) (et donc par la définition de la validité).
   (f) Il est **vrai** que toute inférence avec des prémisses contradictoires est valide. Elle est valide à condition que si les prémisses sont vraies, alors la conclusion l'est aussi. Si les prémisses ne peuvent pas être vraies, alors il n'importe peu si la conclusion l'est.

6. (2 points) Considérez le connecteur binaire « $\downarrow$ » défini ainsi :

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Solution : Rajoutons « $\downarrow$ » à notre langue de la manière suivante.

Nous construisons une langue $\mathcal{L}^{\#}$ en ajoutant à la définition de l'alphabet la clause

- « $\downarrow$ » (« ni ... ni $\cdots$ »)

et en rajoutant à la définition des formules bien formées la clause

- Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \downarrow \psi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.

Dans $\mathcal{L}^{\#}$, tous les autres connecteurs sont définissables à partir de « $\downarrow$ » :

$$\begin{array}{rcl}
\neg\phi & :\Longleftrightarrow & \phi \downarrow \phi \\
\phi \vee \psi & :\Longleftrightarrow & (\phi \downarrow \psi) \downarrow (\phi \downarrow \psi) \\
\phi \wedge \psi & \Longleftrightarrow & \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\
\phi \rightarrow \psi & \Longleftrightarrow & \neg\phi \vee \psi \\
\phi \leftrightarrow \psi & \Longleftrightarrow & (\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)
\end{array}$$

On pourrait donner les équivalents des trois dernières lignes en utilisent que « $\downarrow$ » mais cela serait plus compliqué. Voici les solutions plus élégantes (il en existe de nombreuses autres) :

$$\begin{array}{rcl}
\phi \wedge \psi & :\Longleftrightarrow & ((\phi \downarrow \phi) \downarrow (\psi \downarrow \psi)) \\
\phi \rightarrow \psi & :\Longleftrightarrow & ((\phi \downarrow \phi) \downarrow \psi) \downarrow ((\phi \downarrow \phi) \downarrow \psi) \\
\phi \leftrightarrow \psi & :\Longleftrightarrow & ((\phi \downarrow \phi) \downarrow \psi) \downarrow ((\psi \downarrow \psi) \downarrow \phi)
\end{array}$$

7. (1 point) Jean fait une erreur, assez commune dans le raisonnement probabiliste. La **solution** est une probabilité de 2/3, c'est-à-dire de 66.66 %. Nous pouvons argumenter pour cette conclusion de la manière suivante :

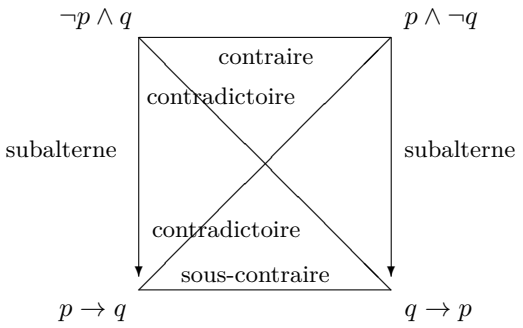
   1. Oublions le sac avec les deux femmes. Dans les deux autres, il y a trois hommes, appelons-les Marc, Fritz et John. Supposons que Marc et Fritz partagent un sac, et que John le partage avec une femme. L'homme que nous avons rencontré peut être, avec la même probabilité de 1/3, soit Marc, soit Fritz, soit John. Si c'est Marc ou Fritz (une probabilité de 2/3), alors l'autre personne dans le sac sera également masculine.
   2. Oublions le sac avec les deux femmes. Parmi les quatre personnes impliquées, seule une est une femme. Il ne reste que trois personnes inconnues, elle doit être une de ces trois – ce qui donne une probabilité de 1/3, et donc une probabilité pour un des deux autres (les hommes) de 2/3.
   3. Changeons l'exemple et prenons quatre cartes de jeu, trois rouges et une noire. Nous mélangeons, choisissons une à l'hasard et retrouvons une rouge. Il nous restent trois cartes, dont une noire et deux rouges. Pensez-vous sérieusement qu'en choisissant une de ces trois, la probabilité n'est que 1/2 qu'elle soit rouge ?

Comme nous le verrons plus tard (série 7, question 3), il est important de bien spécifier les conditions pour les raisonnements de probabilité conditionnelle. Dans notre monde, au moins,[1] il faut identifier les possibilités de manière précise, en spécifiant quel individu aura quel propriété dans le cas considéré. Posant le problème en terme « nous trouvons un homme ; quelle est la probabilité que nous en trouvons un autre ? » nous incline qu'il n'y a que deux possibilités (les deux sacs), même si en vérité il y en a trois (les trois hommes).

8. (2 points) Montrez que l'ensemble de formules propositionnelles { « $\neg p \wedge q$ », « $p \wedge \neg q$ », « $p \to q$ », « $q \to p$ » } forme un carré d'opposition.

   Solution :

   Nous avons le carré suivant :



   - Les relations se vérifient ainsi :
     1. Contrariété : Si « p » est faux et « q » vrai, alors il n'est pas le cas que « p » est vrai et « q » faux ; et vice versa.
     2. Contradiction : Les phrases suivantes sont vraies : « $\neg p \wedge q \leftrightarrow \neg(q \to p)$ » ; « $p \to q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ ».
     3. Subalternation : Si « p » est faux et « q » vrai, alors « $p \to q$ » est vrai. Si « p » est vrai et « q » faux, alors « $q \to p$ » est vrai.
     4. Sous-contrariété : Si « $p \to q$ » est faux, alors « p » est vrai et « q » est faux ; alors « $q \to p$ » est vrai. Si « $q \to p$ » est faux, alors « q » est vrai et « p » est faux ; alors « $p \to q$ » est vrai.

   Voici les tables de vérité correspondantes :

   1. Contrariété :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg q)$	$\neg\big((\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg q)\big)$
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V

   2. Contradiction :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	$(\neg p \wedge q) \leftrightarrow \neg(q \to p)$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V

1. Il en est différent dans le monde de la mécanique quantique, voir Kripke, *Naming and Necessity* et d'autres. La mécanique quantique semble ‹ identifier › les possibilités qualitativement identiques. Si nous faisons la même chose dans notre exemple, nous obtenons un résultat faux. Nous avons donc un vrai problème.

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \to q) \leftrightarrow \neg(q \to p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

3. Subalternation :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \to q$	$(\neg p \wedge q) \to (p \to q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$q \to p$	$(p \wedge \neg q) \to (q \to p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V

4. Sous-contrariété :

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \vee (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

9. (8 points) Montrez que les phrases données sont des théorèmes de HC.

Solution : La difficulté est de trouver les bonnes instanciations des axiomes – tout le reste s'ensuit avec MP :

(a) Pour montrer que « $(p \wedge q) \to (q \wedge p)$ » est un théorème de HC, nous faisons une première dérivation comme suit :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to q$	$\mathbf{H_9}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \to q) \to (((p \wedge q) \to p) \to ((p \wedge q) \to (q \wedge p)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \to p) \to ((p \wedge q) \to (q \wedge p))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$	(MP) de (2) et (4)

(b) Pour dériver la "conditionalisation", « $p \to (q \to p)$ » :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \to p) \to (p \to (q \to p))$	$\mathbf{H_3}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (q \to p)$	(MP) de (1) et (2)

(c) La troisième dérivation, de « $(p \vee q) \to (\neg p \to q)$ », se fait ainsi :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (\neg p \to q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash ((q \wedge \neg p) \to q) \to (q \to (\neg p \to q))$	$\mathbf{H_3}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (q \wedge \neg p) \to q$	$\mathbf{H_8}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (\neg p \to q)$	(MP) de (2) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (\neg p \to q)) \to ((q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q)))$	$\mathbf{H_7}$
(6)	$\mathsf{HC} \vdash (q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q))$	(MP) de (1) et (5)
(7)	$\mathsf{HC} \vdash (p \vee q) \to (\neg p \to q)$	(MP) de (4) et (6)

Une autre possibilité est de réutiliser le résultat de (b) à la ligne (2), en tant qu'instance de substitution (cf. la leçon 4 sur les instances de substitutions) :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (\neg p \to q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash q \to (\neg p \to q)$	
(3)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (\neg p \to q)) \to ((q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q)))$	$\mathbf{H_7}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \vee q) \to (\neg p \to q)$	(MP) de (2) et (4)

(d) Pour montrer que « $p \to (q \to (p \vee r))$ »est un théorème, nous le dérivons comme suit :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (p \vee r)$	$\mathbf{H_5}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \to p) \to ((p \to (p \vee r)) \to ((p \wedge q) \to (p \vee r)))$	$\mathbf{H_2}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (p \to (p \vee r)) \to ((p \wedge q) \to (p \vee r))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \to (p \vee r)$	(MP) de (2) et (4)
(6)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \to (p \vee r)) \to (p \to (q \to (p \vee r)))$	$\mathbf{H_3}$
(7)	$\mathsf{HC} \vdash p \to (q \to (p \vee r))$	(MP) de (5) et (6)